Epreuve: Mathématiques	Devoir de contrôle n 3	Durée :2h
Prof : MAATALLAH	Le 19 - 04 - 2010	Classe : 4 Tec 1

EXERCICE N 1 :(6 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1/ Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

2/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}$. Montrer que : $S_n - \frac{1}{2}T_n \le \ln u_n \le S_n$.

3/ a) Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

b) Etudier la monotonie de (u_n) est déduire qu'elle est convergente .

c) Soit l sa limite. Donner un encadrement de l.

EXERCICE N 2 :(7 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 : U_1 contient une boule blanche et quatre boules noires , U_2 contient trois boules blanches et deux boules noires.

1/ On considère l'épreuve suivante : On choisit une urne au hasard et on tire simultanément trois boules.

a) Calculer la probabilité de l'évènement A : « Obtenir trois boules de la même couleur ».

b) On répète l'épreuve précédente n fois de suite ($n \ge 2$) en remettant les boules dans leur propre urne après cha[redacted] épreuve. Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'évènement A .

c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \ge 0{,}998$.

2/ On tire simultanément deux boules de U_1 qu'on les place dans U_2 puis on tire simultanément deux boules de U_2 q[redacted] les place dans U_1.

a) Soit l'évènement B : « la répartition des couleurs reste inchangée dans les urnes ». Montre que $p(B) = \frac{2}{5}$

b) Calculer la probabilité de l'évènement C : « Tirer la boule blanche de U_1 sachant que l'évènement B est réalisé ».

c) Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de boules blanches qui restent dans U_2 à la fin du jeu. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

EXERCICE N 3 :(7 points)

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = e^x - 1$. On désigne par [redacted] C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Vérifier que les courbes C_f et C_g ont une demi-tangente commune au point d'abscisse 0. Préciser la position de la [redacted]be C_f par rapport à cette tangente.

2/ a) Dresser le tableau variation de f.

b) Montrer que les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x. tracer les courbes C[redacted]

3/ Soit a> 0. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a) = \int_0^a \ln(x+1)dx$.

a) En utilisant des considérations d'aires, montrer que $I(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1)dx$. En déduire la valeur d[redacted]).

b) Retrouver la valeur de I (a) en effectuant une intégration par parties.

Bon travail