

Classe : Bac E & G

Devoir de Synthèse N°3

Mezrigui Lassaad

Durée : 2 heures

Téléphone : 55668162

Exercice 1(QCM)

Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou si elle est fausse, aucune justification n'est demandée.

1. La droite d'équation $y=2$ est asymptote à la courbe C.
2. L'équation $f(x)=1$ admet exactement 2 solutions.
3. $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-5, 2[$.
4. Sachant que $\alpha \in [1, 2[$, on a $\int_{\alpha}^2 f(x)dx < 0$.
5. Les primitives de f sont croissantes sur $[1, \alpha]$.
6. Si $-2 < x < 1$ et $\alpha < x'$ alors $f(x) < f(x')$.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$$

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Montrer que $f(x) = x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}$.
b. En déduire la limite de f en $-\infty$. Interpréter le résultat de graphiquement.
3. Montrer que $f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 0.
6. Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α .
7. En déduire le signe de f.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

1. Calculer $g(0)$, $g(\alpha)$ et $g(1)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de g.

Partie C

Soit la fonction définie par $F(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$.

1. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. En déduire $A = \int_0^2 f(x) dx$.

Exercice 3

On considère la suite réelle (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_n = \frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}} \end{cases}$$

1. Calculer U_1 et U_2 .
2.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.
 - b. Montrer que (U_n) est une suite croissante.
 - c. En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.
3. Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$.
 - a. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.
 - b. Exprimer V_n en fonction de n . en déduire U_n en fonction de n .
 - c. Retrouver la limite de (U_n) .

Exercice 4

Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classées dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. On constate que chaque année, 5% des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20% des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A.

- 1) Réaliser un graphe décrivant cette situation.
- 2) Ecrire la matrice M de transition de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique.
- 3) En 2006, le classement était tel que le quart des hôtels était dans la catégorie A.
Calculer l'état de l'année 2007, puis 2008
- 4) L'état $(0.5, 0.5)$ est-il stable ? justifier la réponse.
- 5) Trouver vers quel état converge ce système.

