Devoir de contrôle n°02 ($4^{ème}$ E.G 1)

Exercice n°01(3 pts):

Indiquer la réponse juste en justifiant votre réponse:

1- Soit $f(x) = \ln(x)\,; x \in \mathbb{R}_+^*$ *alors on a:*

a) $f'(x) = -\frac{1}{x}$; *b)* $[f(x)]' = 0$; *c)* $f'(x) = x$

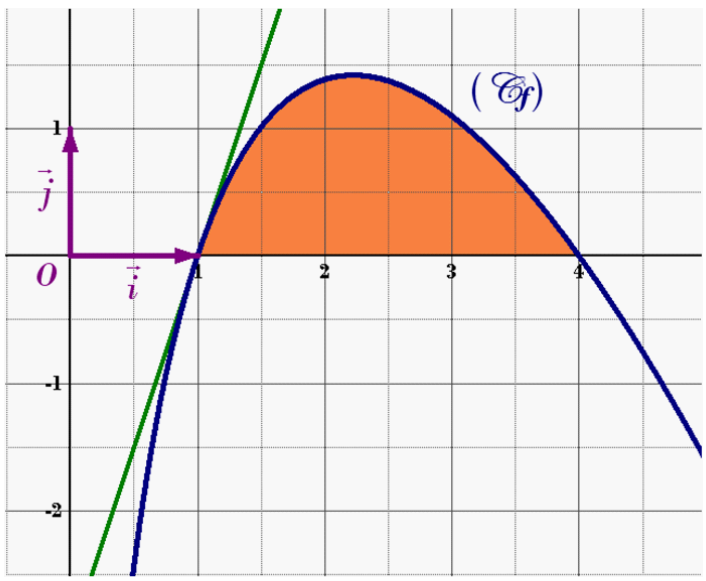
2- Soient $f(x) = \ln(x)\,; x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $g(x) = e^x;\,; x \in \mathbb{R}$ *alors on a:*

a) $g[f(x)] = x\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$; *b)* $f(x) = g(x); \forall x \in \mathbb{R}_+^*$; *c)* $f(x) \prec g(x); \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

3- a) $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t^{2012}} = 0$; *b)* $\lim\limits_{t \to 1^+} \ln(t-1) = +\infty$; *c)* $\lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = -1$

Exercice n°02(5 pts):

La courbe si dessous est celle d'une fonction f.



Pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[, f(x) = (ax+b)\ln(x)$ *avec* a *et* b *deux réels.*

1- Montrer que f *est dérivable sur* $\left]0, +\infty\right[$ *et calculer* $f'(x)$.**(1pt)**

2- Sans justifier et par lecture graphique déterminer $f(4)$ *et* $f'(1)$.**(1pt)**

3- a) Montrer que a *et* b *sont solutions du système* $\begin{cases} 4a + b = 0 \\ a + b = 3 \end{cases}$ **(1pt)**

b) Déterminer a *et* b.**(1pt)**

4- Soit S *la région du plan limitée par la courbe de* f *, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = 1$ *et* $x = 4$.

Montrer que : $2 \leq$ *aire de* $(S) \leq 4,5$.**(1pt)**

Exercice n°03:

Soient $g(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ *et* (C_g) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1- Déterminer D_g.**(1pt)**

2- a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ *et Interpréter graphiquement le résultat obtenu.***(1pt)**

b) Vérifier que pour tout $x \in D_g$ *, on a:* $g(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^x)$.**(1pt)** *c) En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.**(0,5pt)**

d) Tracer (C_g) *dans un repère orthonormé* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.**(1pt)**

3- Soit $G(x) = \int\limits_0^x g(t)\,dt$ *avec* $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}; \forall t \in \mathbb{R}$.**(0,5pt)**

b) Calculer $\int\limits_0^x \frac{dt}{1+e^t}$.**(1pt)**

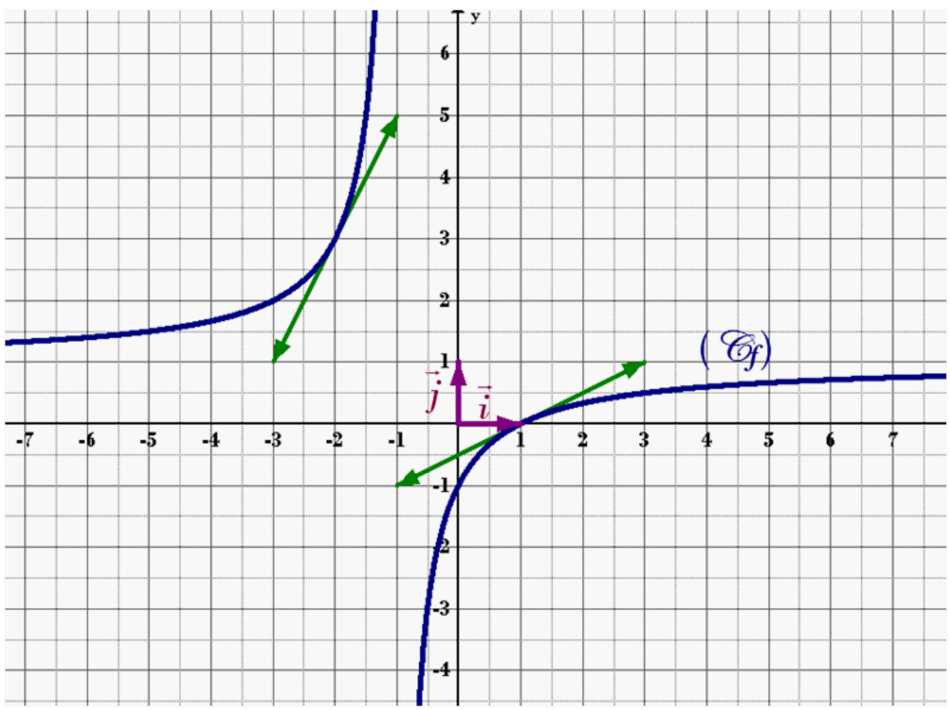
c) En déduire à l'aide d'une intégration par parties, l'expression de $G(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.**(1pt)**

d) Vérifier que $G(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + 2\ln(2) - g(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.**(0,5pt)**

e) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$.**(0,5pt)**

Exercice n°04(4pts):

Soit (C_f)*la courbe représentative d'une fonction* f *dans un repère orthonormé* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$



■ *Déterminer graphiquement:*

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$.**(1pt)**

2- $f'(-2)$ *et* $f'(1)$.**(0,5pt)**

3- Le signe de f *sur* D_f.**(0,5pt)**

4- Le nombre de solution de l'équation $f(x) = m; m \in \mathbb{R}$.**(0,5pt)**

■ *Montrer graphiquement que:*

1- f *réalise une bijection de* $]-1, +\infty[$*sur un intervalle* I *que l'on précisera.***(0,5pt)**

2- $(f^{-1})'(0) = 2$.**(0,5pt)**

3- f^{-1} *est strictement croissante sur* I.**(0,5pt)**