Devoir de synthèse n°01(4 ème E.G)
Durée 02 heures

Exercice n°01(8 pts):

Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & 0 \\ 2 & m & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *avec* $m \in \mathbb{R}$.

1.(a) *Montrer que* $\text{dét}\,(A_m) = m^2 + 4m + 4$. $\triangleright$ $(1pt)$

(b) *Déterminer la(es) valeur(s) de* m *pour que la matrice* A *soit inversible.* $\triangleright$ $(1pt)$

2. *On prend maintenant* $m = 3$.

Soit $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{8}{25} & \frac{17}{25} \end{pmatrix}$

(a) *Calculer* $A_3 \times B$. $\triangleright$ $(1,5pts)$

(b) *En déduire* A_3^{-1}. $\triangleright$ $(1,5pts)$

3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}^3$ *le système* (S) : $\begin{cases} 5x + y + z = 25 \\ y + z = -2 \\ 10x - 8y + 17z = 75 \end{cases}$. $\triangleright$ $(3pts)$

Exercice n°02(3 pts):

Calculer les limites suivantes:

(a) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$. $\triangleright$ $(0,75pt)$

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2-3}{|x|}$. $\triangleright$ $(0,75pt)$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x^4-2}{x^2+1}$. $\triangleright$ $(0,75pt)$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\pi-x)}{x}$. $\triangleright$ $(0,75pt)$

Exercice n°03(6 pts):

Soit $f(x) = -\frac{\cos(2x)}{x^2+1}$

1. *Déterminer* D_f. $\triangleright$ $(0,5pt)$
2. *Montrer que pour tout* $x \in D_f$ *, on a:* $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2+1}$. $\triangleright$ $(0,5pt)$

3. *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et en déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $\rhd$ $(1pt)$

4. *Soit* g *la restriction de* f *à l'intervalle* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

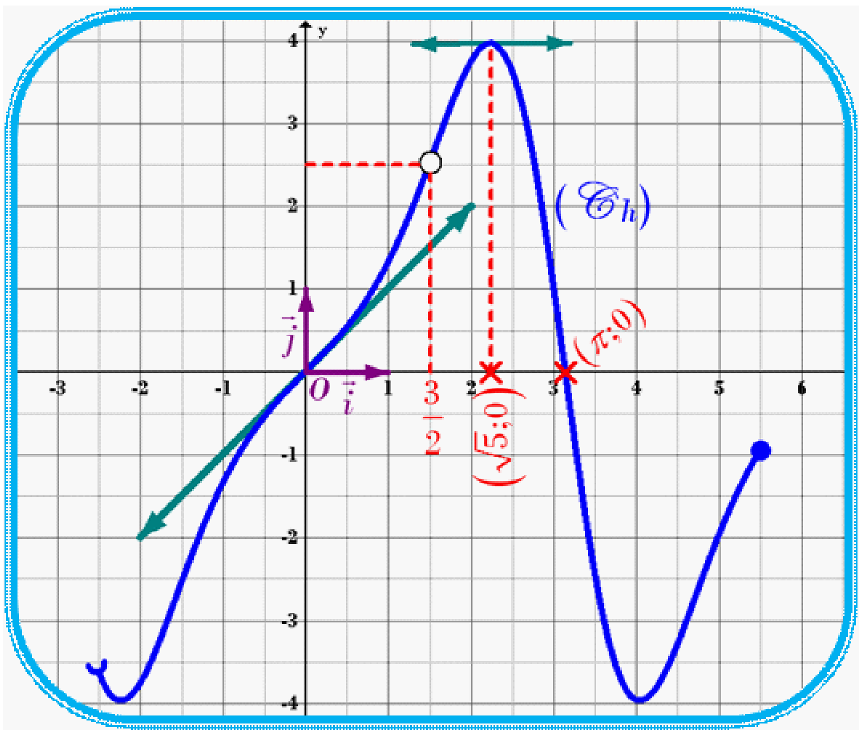
(a) *Montrer que* g *réalise une bijection de* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ *sur un intervalle* I *que l'on précisera.* $\rhd$ $(1,5pts)$

(b) *Déterminer* $g^{-1}(0)$ *et* $g^{-1}\left(\frac{4}{4+\pi^2}\right)$. $\rhd$ $(1pt)$

(c) *Construire* (C_g) *et* $(C_{g^{-1}})$ *dans un même repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. $\rhd$ $(1,5pts)$

Exercice n°04(3 pts):

On donne la figure ci-dessous:



1. *Déterminer graphiquement:*

(a) D_h. $\rhd$ $(0,5pt)$

(b) $h'(0)$ $\rhd$ $(0,75pt)$

(c) $h'\left(\sqrt{5}\right)$. $\rhd$ $(0,25pt)$

(d) *Le signe de* $h'(x)$ *pour* $x \in \left[\sqrt{5}, \pi\right]$ $\rhd$ $(0,5pt)$

2. *La fonction* h *est-elle prolongeable par continuité en* $\frac{3}{2}$*?Justifier votre réponse.*$\rhd$ $(1pt)$