N.B: le sujet d'examen est composé de 3 pages .la feuille annexe 3 est a rendre avec votre copie

EXERCICE 1: *3 points*

Cocher la réponse exacte (les cases seront cochés dans la feuille annexe 3)

soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^3+x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est :

a) □ $+\infty$; **b)** □ $-\infty$; **c)** □ 0

2- la fonction dérivée f' de f sur $]0,+\infty[$ est donnée par

a) □ $f'(x)=3x^2+1+\sqrt{x}$; **b)** □ $f'(x)=3x^2+1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; **c)** □ $f'(x)=3x^2+1+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

3- une primitive F de f sur $]0,+\infty[$ est donnée par:

a) □ $F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-2\sqrt{x}$; **b)** □ $F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+2\sqrt{x}$; **c)** □ $F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{x}$

EXERCICE 2:*7 points*

la courbe si dessous est celle d'une fonction f définie sur $[-1,1]$.(voir feuille annexe page 3)

1- on utilisant le graphique ; déterminer :

a- $f(0)$; $f'_{dr}(1)$ et $f'_g(-1)$

b- le tableau de variations de la fonction f.

c-montrer que la fonction f est une bijection de $[-1,1]$ sur $\left[\frac{2}{3},2\right]$.

on note f^{-1} la réciproque de f.

2- la fonction f représentée si dessus a pour expression $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$; $x\in[-1,1]$

a- vérifier que f est dérivable sur $[-1,1]$ et que $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$

b- soit T la tangente a la courbe C_f au point d'abscisse 0 .
montrer que T à pour équation T: y =-x+1

3- a- montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$

b- étudier la dérivabilité de f^{-1} en $\frac{2}{3}$ et 2.

4- soit la fonction g définie sur $[-1,1]$ par $g(x)=f(x)-x$

a- montrer que g est décroissante sur $[-1,1]$

b- en déduire que l'équation g(x)=0 admet une unique solution x_0 dans $\left]\frac{2}{3},1\right[$.

5 – tracer dans le même repère la droite $\Delta: y=x$,la tangente T,la courbe de f^{-1}.

(voir feuille annexe page3)

voir suite au verso

EXERCICE 3 : *6 points*

1- soit la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x-2}+1$

calculer $f(2)$; $f(3)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- vérifier que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et calculer $f'(x)$

3- a- dresser le tableau de variations de la fonction f

b- en déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[1,+\infty[$

4- a- montrer que $f^{-1}(x)=x^2-2x+3$

b- calculer de deux manières différentes $\left(f^{-1}\right)'(2)$

5- tracer dans un même repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les courbes représentatives de f et f^{-1}

EXERCICE 4 : *4 points*

On considère la matrice carré M suivante $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1- calculer le déterminant de M. en déduire que M est inversible

2- montrer que $M^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3- on considère le système linéaire suivante $S:\begin{cases} y+2z=5 \\ -x+3y=2 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$

a- donner l'écriture matricielle du système S

b- **ré**soudre dans $\mathbb{R}^3$ le système S

feuille annexe a rendre avec votre copie

NOM ***PRENOM*** ***CLASSE***

EXERCICE 1

Cocher la réponse exacte :

soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^3+x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ est :

a) □ $+\infty$; **b)** □ $-\infty$; **c)** □ 0

2- la fonction dérivée f' de f sur $]0,+\infty[$ est donnée par

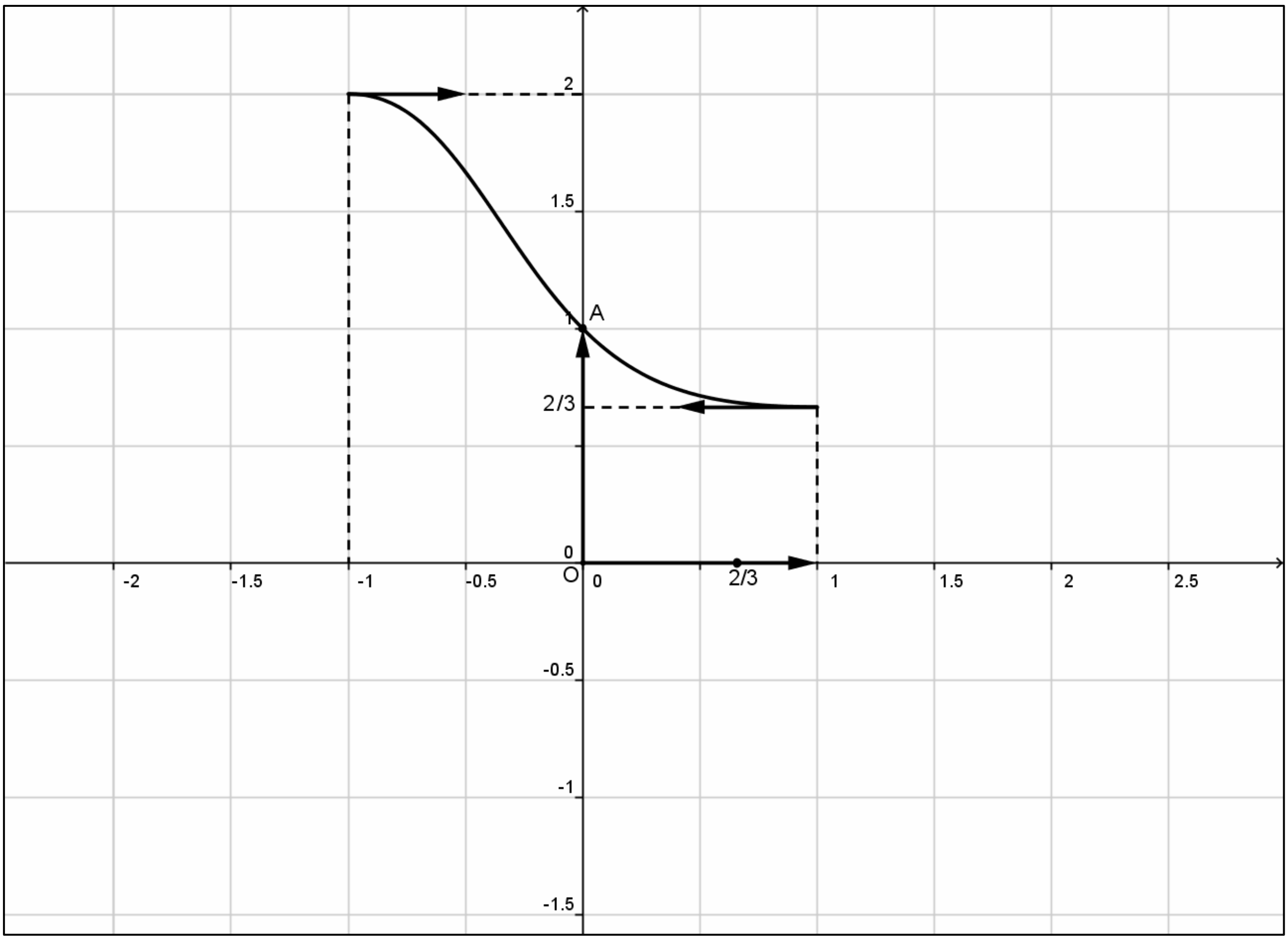
a) □ $f'(x)=3x^2+1+\sqrt{x}$; **b)** □ $f'(x)=3x^2+1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; **c)** □ $f'(x)=3x^2+1+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

3- une primitive F de f sur $]0,+\infty[$ est donnée par:

a) □ $F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-2\sqrt{x}$; **b)** □ $F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+2\sqrt{x}$; **c)** □ $F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{x}$

EXERCICE 2 :(5$^{\text{iéme}}$ question)

Tracer la droite Δ , la tangente T et la courbe de f^{-1}



Prof:bellassoued

CORRECTION DE L'EXERCICE 2

4ème ECONOMIE ET GESTION 3+4

1-a - $f(0)=1$; $f'(-1)=0$; $f'(0)=1$

b- tableau de variations de f

x	-1	1
f'(x)	–	
f(x)	2 ↘	2/3

c- f est continue , strictement décroissante sur l'intervalle $[-1,1]$, donc f réalise une bijection de $[-1,1]$ sur $f([-1,1])=\left[\frac{2}{3},2\right]$

2- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ pour $x\in[-1,1]$.

f est dérivable sur $]-1,1[$ comme fonction rationnelle

f est dérivable a droite de -1 et a gauche de 1 ($f'_{dr}(-1)=f'_g(1)=0$)

Donc f est dérivable sur $[-1,1]$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x^3+2x^2+2x-2x^3-2x-x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{\overbrace{2x^3-2x^3}^{0}+\overbrace{2x^2-x^2}^{x^2}+\overbrace{2x-2x}^{0}-1}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

d'où $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}}$

rappel: $\boxed{f=\dfrac{u}{v};\text{alors} f'=\dfrac{u'v-v'u}{u^2}}$

b- soit T la tangente a la courbe C_f au point d'abscisse 0

alors T a pour équation $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$

on remplace x par 0 dans l'expression de f(x) et dans l'expression de f'(x) ; on obtient $\boxed{T: y=-x+1}$

rappel:si f et dérivable en x_0 alors l'équation de la tangente a la courbe C_f au point d'abscisse x_0 a

pour équation : $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$

3- $f:[-1,1]\to\left[\frac{2}{3},2\right]$; $f^{-1}:\left[\frac{2}{3},2\right]\to[-1,1]$, $f(0)=1$ **et** $f'(0)=-1\neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{-1}=-1$ donc $\boxed{(f^{-1})'(1)=-1}$

rappel: $\boxed{\text{si}\begin{cases}f(x_0)=y_0\\ f'(x_0)\neq 0\end{cases}\Rightarrow \text{alors:}\begin{cases}f^{-1}(y_0)=x_0\\ (f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\end{cases}}$

$\begin{cases} f(1)=\dfrac{2}{3} \\ f'_g(1)=0 \end{cases}$; alors f^{-1}n'est pas dérivable a droite de $\dfrac{2}{3}$

(en faite : $\left(f^{-1}{}_{dr}\right)'\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{f'_g(1)}=\dfrac{1}{0}=\infty$ **)**

de même $\begin{cases} f(-1)=2 \\ f'_{dr}(-1)=0 \end{cases}$; alors f^{-1}n'est pas dérivable a gauche de 2

<u>interprétation géométrique</u> : la courbe de f^{-1}admet deux demis tangentes verticales aux points d'abscisses $\dfrac{2}{3}$ et 2 respectivement.(voir figure)

4- g définie sur$[-1,1]$ par $g(x)=f(x)-x$

a-g est dérivable sur $[-1,1]$comme différence de deux fonctions dérivables sur $[-1,1]$ $g'(x)=(f(x)-x)'=f'(x)-1$

on sait que $f'(x)\leq 0$ **(voir tableau de variations de f / 1-b)**;donc $g'(x)\leq 0$ et par suite g est strictement décroissante sur $[-1,1]$

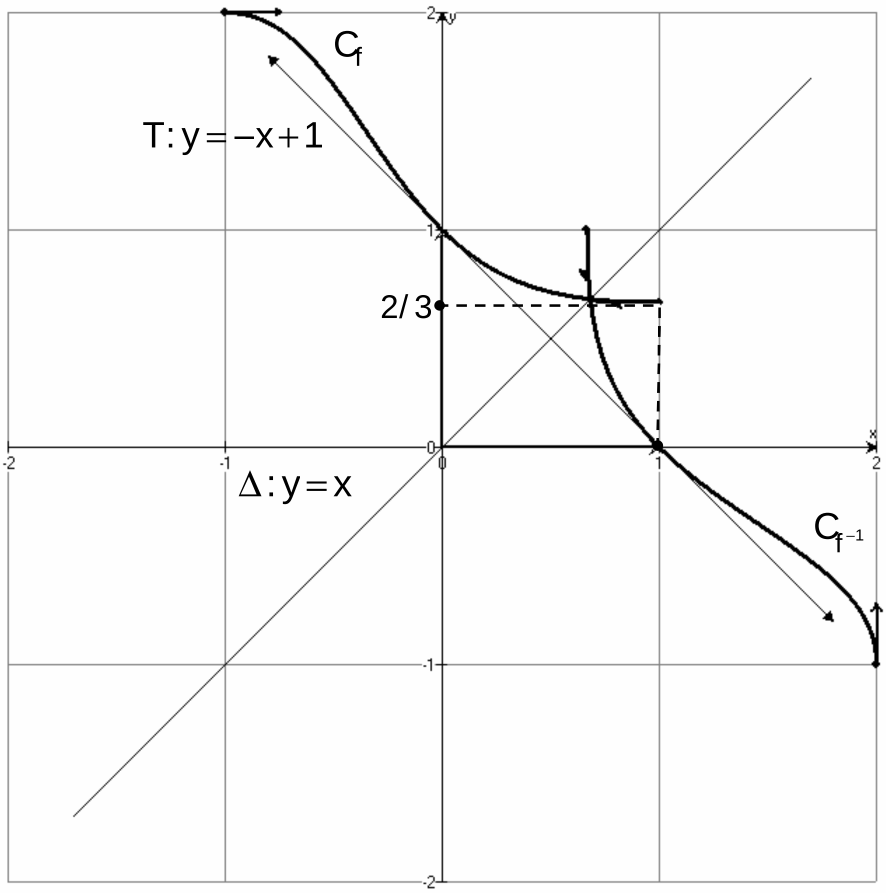
b- la fonction g est continue , décroissante sur $[-1,1]$ en particulier sur $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$

$g\left(\dfrac{2}{3}\right)=f\left(\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{54}\succ 0$ et $g(1)=f(1)-1=\dfrac{-1}{3}\prec 0$

g réalise une bijection de $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$ sur $\left[\dfrac{-1}{3},\dfrac{1}{54}\right]$; $0\in\left[\dfrac{-1}{3},\dfrac{1}{54}\right]$

donc l'équation g(x)=0 admet un unique solution x_0 dans$\left[\dfrac{2}{3},1\right]$

5- graphique:



CORRECTION DE L'EXERCICE 3

4ème ECONOMIE ET GESTION 3+4

f définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x-2}+1$

1- $f(2)=\sqrt{2-2}+1=0+1=1$ donc $\boxed{f(0)=1}$; $f(3)=\sqrt{3-2}+1=1+1=2$ donc $\boxed{f(3)=2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(x-2)}+1=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

2-la fonction $x\mapsto x-2$ est dérivable sur $]2,+\infty[$ et par suite la fonction $x\mapsto\sqrt{x-2}$ est dérivable sur $]2,+\infty[$ donc la fonction $f(x)=\sqrt{x-2}+1$ est dérivable sur $]2,+\infty[$ et $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}}$

3-a $f'(x)\succ 0$ donc f strictement croissante sur $[2,+\infty[$

b- tableau de variations de f:

x	2		$+\infty$
f'(x)	‖	+	
f(x)	1	↗	$+\infty$

rappel : $\boxed{\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$

c- f est continue , strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$, donc f réalise une bijection de

$[2,+\infty[$ sur $f([2,+\infty[)=[1,+\infty[$ et par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[1,+\infty[$

4-/a

$x\in[2,+\infty[: y=f(x)=\sqrt{x-2}+1$

signifie: $\sqrt{x-2}=y-1$

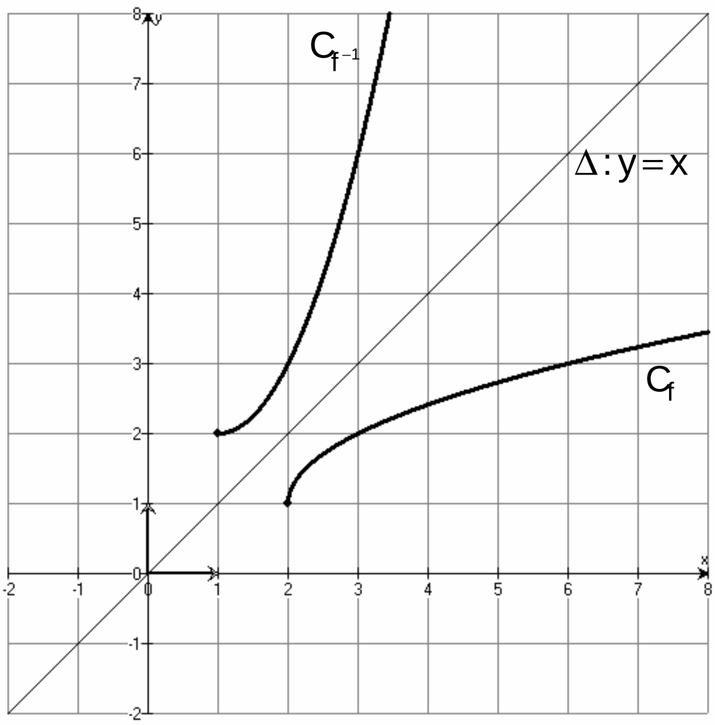
signifie: $\left(\sqrt{x-2}\right)^2=(y-1)^2$

signifie: $x-2=y^2-2y+1$

signifie: $x=y^2-2y+1+2$

signifie: $x=y^2-2y+3$

d'où $f^{-1}(x)=x^2-2x+3, x\in[1,+\infty[$



b- *première méthode*:

$\left(f^{-1}\right)'(x)=\left(x^2-2x+3\right)'=2x-2$

d'où $\left(f^{-1}\right)'(2)=2\times2-2=4-2=2$

$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(2)=2}$

***deuxième méthode*:**

$\begin{cases} f(3)=2 \\ f'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{3-2}}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ alors:

$\begin{cases} f^{-1}(2)=3 \\ \left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}=\dfrac{1}{f'(3)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2 \end{cases}$ donc $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(2)=2}$