Exercice 1……………….(4,5 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes **sans** justification.

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$.

3) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Choisir **la seule** réponse exacte **sans** justification.

1) Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice inverse de A est :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

2) Soit la matrice $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de B est égal à :

a) -1 . b) 1. c) 0.

3) Soit la matrice $C=B^2$. Le coefficient c_{23} de la matrice C est :

a) 0. b) -1. c) 1.

Exercice 2……………….(6 points)

1) On considère la matrice $M_\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) calculer, en fonction de α , le déterminant de M_α .

b) Pour quelles valeurs de α ; M_α est inversible ?

2) On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) En utilisant la première question, justifier que A est inversible.

b) Calculer $A\times B$.

c) En déduire A^{-1} et B^{-1} .

3) On considère le système $(S):\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ -2x+4y+z=3 \\ 4x+y-2z=-6 \end{cases}$.

a) Ecrire (S) sous forme matricielle.

b) Résoudre alors (S).

Exercice 3………………..(6 points)

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3+5x-5$

1. Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Dresser le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}$.

3. a) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution que l'on note α dans $]0,1[$.

b) Trouver un encadrement de α d'amplitude 0,25.

4. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $g(x)=x^4+5x^2-10x$.

a) Montrer que $g(\alpha)=\frac{5}{2}\alpha(\alpha-3)$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction *g*.

c) Donner $g([1,+\infty[)$

Exercice 4………………..(3,5 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1} & \text{si } x>1 \\ x^3+x-2 & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$.

1) a) Vérifier que *f* est continue en 1.

b) En déduire que *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3) Vérifier que pour tout $x\in\,]1,+\infty[$; $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) On donne ci-contre le tableau de variation de *f*.

a) Recopier et compléter le tableau.

b) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

c) Déterminer $f(]-\infty,0])$ et $f([3,+\infty[)$.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↗		↘