

Exercice n°1 :(4 points)

ABC triangle équilatéral direct. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$ et par D le symétrique du point A par rapport à C .

1. Soit f l'antidépacement qui transforme C en A et A en B .
 - a. Montrer que f est une symétrie glissante
 - b. Déterminer les éléments caractéristiques de f
2. Soit g la similitude directe qui transforme B en D et I en C .
 - a. Déterminer une mesure de l'angle et le rapport de g
 - b. Déterminer $g(A)$
 - c. Donner la forme réduite de g
3. Soit $S = f \circ g$
 - a. Justifier que S est une similitude indirecte
 - b. Déterminer $S(I)$ et $S(A)$
 - c. Montrer que Ω le centre de S est le barycentre des points pondérées $(B,1)$ et $(I,-4)$
4. Montrer que l'axe Δ de S est la perpendiculaire à (AB) en Ω . Construire Δ

Exercice n°2 :(7 points)

- A.
1. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln(x) - 1$
 - a. Etudier les variations de la fonction g (on ne demande pas les limites)
 - b. Dédire que $\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}) \geq 1$ pour tout $x > 0$

2. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x})} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j})

- a. Montrer que f est continue à droite en O

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement

c. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

3.

a. Montrer que pour tous $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1 - \ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}))^2}$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f

c. Vérifier qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1 est $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

d. Construire la courbe (C_f) et la tangente (T) dans le repère (o, \vec{i}, \vec{j})

B. Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} - \ln(\sqrt{t})} dt$

1.

a. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$

b. Montrer que F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

c. Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x

2.

a. Calculer $\int_1^x 1 + \ln(\sqrt{t}) dt$ pour $x \in]0, +\infty[$

b. Montrer que $\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} - \ln(\sqrt{t})} \leq 1 + \ln(\sqrt{t})$ pour tout $t \in [1, +\infty[$

c. En déduire que $F(x) \leq \frac{1}{2}(x-1) + x \ln(\sqrt{x})$ pour tout $x \geq 1$

3.

a. Calculer $\int_1^x 1 + \frac{\ln(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt = x + 1 - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \ln(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$

b. Montrer que $f(t) \geq 1 + \frac{\ln(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \quad \forall t \in [1, +\infty[$

c. En déduire que $x + 1 - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \ln(x) \leq F(x)$ pour tout $x \geq 1$

d. Déduire de ce qui précède une valeur approchée de $F(2)$

Exercice n°3 : (4 points)

On considère dans $\square \times \square$ l'équation $(E) : 2x - 3y = -1$

1.

a. Vérifier que $(1, 1)$ est une solution de (E)

b. Résoudre dans $\square \times \square$ l'équation (E)

- 2.
- Montrer que $13x^2 + 10x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$ équivaut à $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$
 - Résoudre dans \mathbb{Z} : $13x^2 + 10x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) On considère la droite Δ dont une équation cartésienne est " $2x - 3y + 1 = 0$ "
- Déterminer l'ensemble ζ des points de Δ dont les coordonnées sont des entiers relatifs
- 4.
- Déterminer le sous-ensemble Γ des points de ζ dont le carré de la distance au point O est un multiple de 5
 - Préciser les points de Γ dont les coordonnées sont strictement comprises entre -20 et 20

Exercice n°4 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe on a tracé dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative de la fonction K définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $K(x) = 1 - \frac{1}{x-1} + \ln|x-1|$

- On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $h(x) = (x-2)\ln|x-1|$
 - Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $h'(x) = K(x)$
 - Montrer que le point $O(0,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_h) . Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C_h) au point O
 - Déterminer la nature des branches infinies de (C_h)
 - Construire la courbe (C_h) ainsi que la tangente au point O dans le repère (o, \vec{i}, \vec{j})
- Soit λ un réel de $]0, 1[$
 - On donne $I = \int_0^\lambda \frac{x^2}{x-1} dx$ et $J = \int_0^\lambda \frac{x}{x-1} dx$
Calculer I et J (On pourra remarquer que : $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$ et que $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$)
 - Calculer $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_h) , l'axe des abscisses et les droites d'équations " $x=0$ " et " $x=\lambda$ "
 - Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 1} A(\lambda)$

