Lycée secondaire Bennane-Bodheur	**DEVOIR DE CONTROLE N°2**	*Durée: 2 heures*
Mr : Bouhouch Ameur	*4ème Math*	*Coefficient : 4*

__N.B :__ La qualité de la rédaction ,la clarté et la précision des raisonnement ontreront pour une part importante lors de l'appréciation des copies…

Exercice n°1: (6 pts)

A) Pour tout entier naturel non nul n, soit $I_n = \int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x^2}dx$

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = (n+1).I_n - \frac{1}{e}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in IN^*$, $0 \le I_n \le \frac{1}{ne}$ puis calculer la limite de la suite (I_n)

3) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$, on a : $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

b) Déduire que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$.

B) <u>Dans cette partie, on va démontrer que e est irrationnel.</u>

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $V_n = U_n + \frac{1}{n.n!}$.

1) a) Montrer que (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} V_n = e$.

c) En déduire que $U_n < e < V_n$ pour tout $n \in IN^*$.

2) On suppose que $e = \frac{p}{q}$ tels que p et q sont des entiers naturels.

En utilisant l'inégalité de la question B)1)c) ; Montrer que $p \times q! - q \times q! \times U_q$ est un entier appartenant à $]0;1[$ puis conclure.

Exercice n°2: (7 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la page annexe (figure n°1) ,on donne un losange AOBC de centre I tel que $(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et D le point tel que $D = S_O(C)$.

Soient J et K les milieux respectifs des segments [AD] et [BD].

1) Montrer que le triangle ABD est équilatéral.

2) Montrer que le point O est le centre de gravité de chacun des triangles ABD et IJK.

3) a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui transforme A en O et C en D.

b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

4) Soit g la similitude indirecte tels que g(A)=K et g(B)=I.

www.devoirat.net 2016

a) Montrer que le rapport de g est égal à $\frac{1}{2}$.

b) Déterminer l'image du triangle ABD par g et déduire que O est le centre de g.

c) Déterminer et construire l'axe Δ de g.

5) Soit la transformation $S = gof$.

a) Déterminer $S(A)$ et $S(C)$.

b) Montrer que S est une homothétie et préciser son rapport.

c) Construire le centre Ω de S.

Exercice n°3: **(7pts)**

A) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(0)=0$ et $g(x)=x.\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ si $x>0$

On désigne par sa courbe représentative **(C)** dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que g est continue à droite en 0.

2) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0.Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-1$.Interpréter graphiquement ce résultat.

B) Soit $k\in \mathbb{N}^*$ et f_k la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f_k(0)=0$ et $f_k(x)=x.\ln\left(\frac{x}{x+k}\right)$ si $x>0$.

On désigne par sa courbe représentative **(**C_k**)** dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que **(**C_k**)** est l'image de (C) par l'homothétie h de centre O et de rapport k.

2) Déduire, alors (sans utiliser l'expression de f_k) que $\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=-k$ et donne une interprétation Graphique de ce résultat.

3) On a tracé dans la page annexe (figure n°2) la courbe représentative **(**C_{k_0}**)** d'une fonction f_{k_0}.

a) Par une lecture graphique, déterminer la valeur de k_o.

b) Tracer alors la courbe (C) à partir de **(**C_{k_0}**).**

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{1}{e-1}$ et $x=1$.

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A=1-\frac{1}{2}.\ln(e-1)-\frac{e}{2(e-1)^2}$ (u.a)

5) **Facultatif** : Soit (Γ) la courbe de fonction réciproque g^{-1} de g. Montrer que **(**C_k**)** est l'image de (Γ) par une similitude qu'on caractérisera.

BON TRAVAIL

www.devoirat.net 2016

PAGE ANNEXE

Nom et Prénom :……………………………………………………………………….

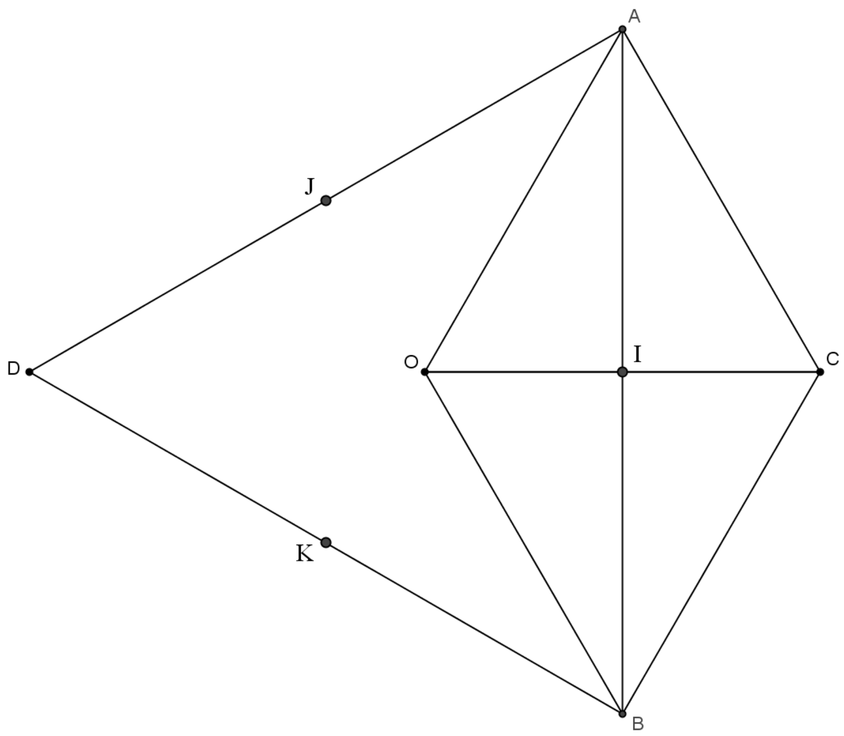

Figure n°1

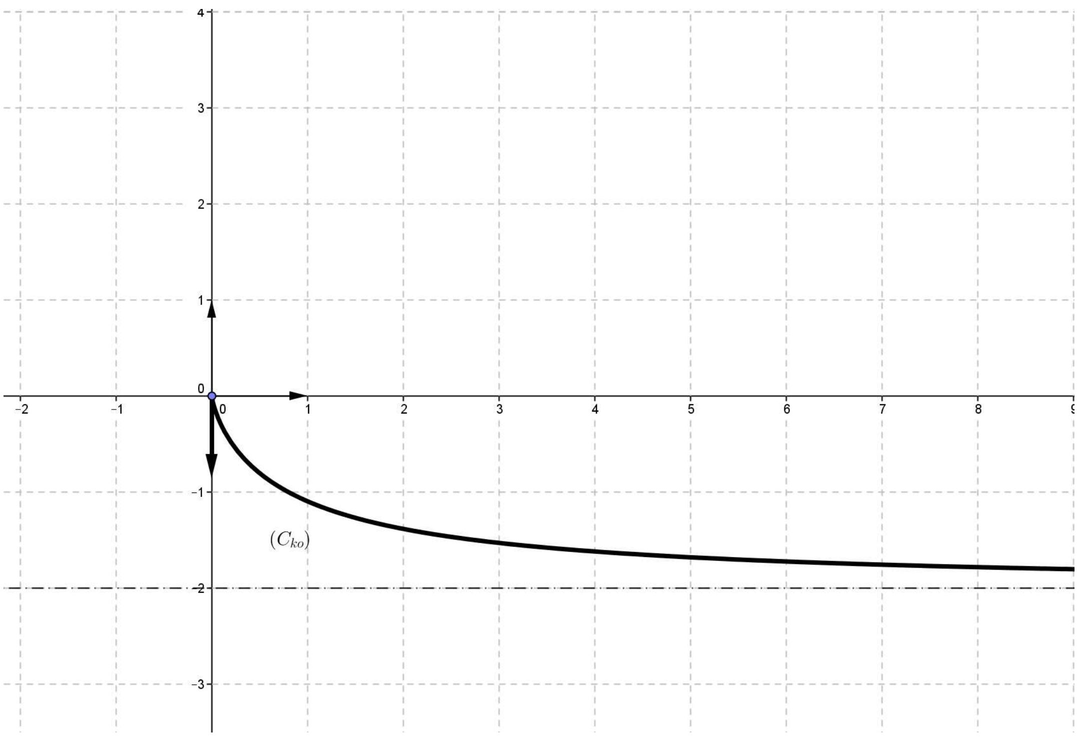

Figure n°2

www.devoirat.net 2016