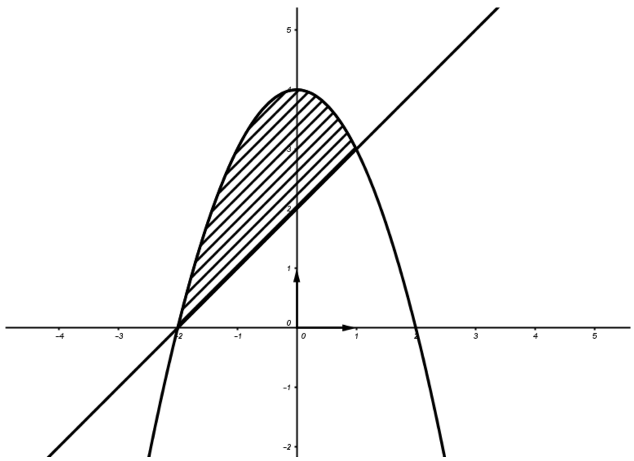
Exercice N: 1

Pour chacune des questions, une et une seule affirmation est exacte .
Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte

A) On représenté ci-dessous les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x + 2$.



On admet que $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^2 dx = 3$, alors l'aire de la surface hachurer en unités d'aire est :

(1) $4,5$. (2) $6,5$. (3) 9 .

B) Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{4}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$,$n \in \mathbb{N}^*$ .On admet que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$. Alors :

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$. (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}$. (3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi$.

C) On rapporte le plan $\mathcal{P}$ à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ et on considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 2y + 2 \\ y' = 2x - 1 \end{cases}$ alors : f est

(1) Une symétrie glissante. (2) Un déplacement. (3) Une similitude de rapport 2 .

D) Soit Ω un point du plan. L'application $r_{\left(\Omega,\, \frac{\pi}{3}\right)} \circ h_{(\Omega,\, -3)}$ est une similitude directe dons la forme réduite est :

(1) $r_{\left(\Omega,\, \frac{\pi}{3}\right)} \circ h_{(\Omega,\, 3)}$. (2) $r_{\left(\Omega, -\frac{\pi}{3}\right)} \circ h_{(\Omega,\, 3)}$. (3) $r_{\left(\Omega,\, -\frac{2\pi}{3}\right)} \circ h_{(\Omega,\, 3)}$.

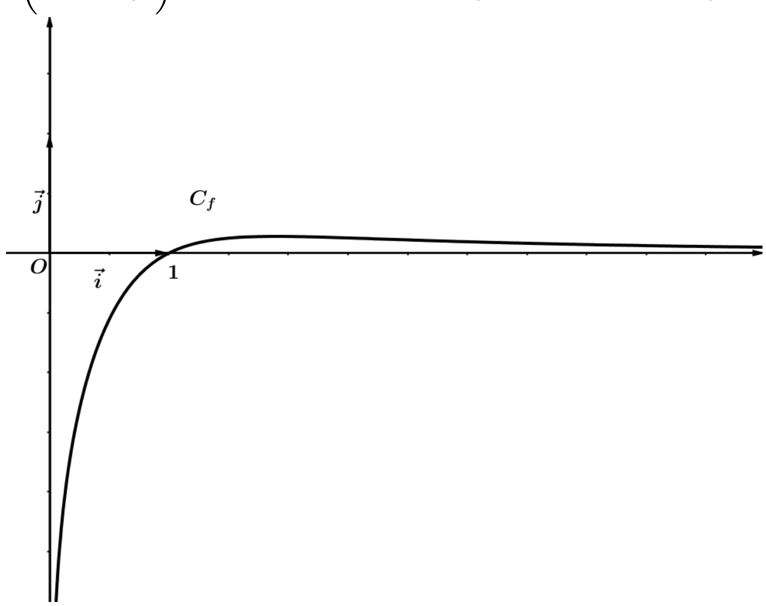
Exercice N: 2

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On rapporte le plan complexe au repère ortonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en C .Caractériser S .
   (a) Montrer que la forme complexe associée à S est $z' = (1+i)\,z$.
   (b) Vérifier que $S(O) = D$.
2. Soit σ la similitude indirecte qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{(1-i)}{2}\overline{z} + \frac{1+3i}{2}$.
   (a) Calculer le rapport de σ et prouver que $\sigma(D) = D$.
   (b) Verifier que $\sigma(C) = O$.
   (c) Déterminer une équation cartésienne de l'axe Δ de σ .
3. On considère l'application $\varphi = \sigma \circ S$.
   (a) Déterminer $\varphi(B)$ et $\varphi(O)$.
   (b) Montrer que φ est une symétrie glissante que l'on caractérisera.
4. Soit $A' = \varphi(A)$ et $C' = \varphi(C)$,montrer que le point D est le milieu du segment $[A'C']$.

Exercice N: 3

Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$,et C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ .Les droites $x=0$ et $y=0$ sont des asymptotes à C_f .



On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et préciser $F'(x)$ .En déduire le sens de variation de F .

2. Montrer que pour tout $t \geqslant 1$, $\dfrac{\ln t}{(1+t)^2} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{\ln t}{t^2}$.

3. Pour $x > 0$,on pose $I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$.

   (a) Par intégration par parties, calculer $I(x)$.

   (b) Par intégration par parties et en utilisant l'égalité $\dfrac{1}{t(1+t)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{1+t}$ pour $t > 0$, calculer $J(x)$.

4. (a) Déduire de ce qui précède que pour $x > 1$, $\ln 2 + \ln(\dfrac{x}{x+1}) - \dfrac{\ln x}{x+1} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$.

   (b) On admet que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ell$, montrer que : $\ln 2 \leqslant \ell \leqslant 1$.

5. Soit G la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $G(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln \mathrm{t}}{\mathrm{t}^2+1} dt$.

   (a) Vérifier que pour tout $x > 0$,$G(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right) - F(x)$ et montrer que $G'(x) = 0$.

   (b) Vérifier que pour tout $x > 0$,$G(x) = 0$ .Et déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F(x)$.