L.Ali bourguiba K. K | Le 1/2/2013 | Classe :4M$_2$ | Durée : 2 H

Prof :Abdesslem Raoudha

Devoir de contrôle N2

Exercice1 :(6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O , i , j)

Soit H l'ensemble des points M (x,y) tels que $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

1)Montrer que H est une Hyperbole et préciser ses sommets S et S', ses foyers ,ses directrices et ses asymptotes

2)Tracer H

2)Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et M le point de coordonnées $(\frac{4}{cos\theta}, 3\,tan\theta)$

a)Montrer que M ∈ H

b)Soit T la tangente à H en M . Montrer que T : 3x - 4y sinθ = 12 cos θ

c)Soit T_S et $T_{S'}$ les tangentes à H respectivement en S et S'

T coupe T_S en P et $T_{S'}$ en P' . Montrer que $\overrightarrow{SP}.\overrightarrow{SP'} = -9$

Exercice 2 : (7 points)

Soit AIBJ un rectangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Soit H le projeté orthogonal de J sur (AB)

1)Soit $\mathbf{s_1}$ la similitude directe telle que **s_1(B) = J** et **s_1(J) = A**

a)Montrer que le rapport de $\mathbf{s_1}$ est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et déterminer son angle

b)Montrer que H est le centre de s_1

c)Caractériser $s_1 o s_1$ et déduire que $\overrightarrow{HA} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{HB}$

2)Soit $\mathbf{s_2}$ la similitude directe de **centre B** et telle que **s_2(I)= J**

a)Déterminer l'angle et le rapport de s_2

b)Caractériser $s_1 o s_2$ et déduire que $s_2(H_1)$= H où H_1 est l'image de H par $t_{\overrightarrow{BJ}}$

3)Soit **g** la similitude indirecte telle que **g(B) = J** et **g(J) = A** et soit H' le symétrique de H par rapport à (AJ)

a)Montrer que g a un centre Ω

b)Caractériser gog et déduire que Ω appartient à (AB)

c)soit h = gos^{-1} caractériser h et déduire g(H)

d)Montrer que Ω appartient à (JH') construire alors Ω et l'axe de g

Exercice3 :(7 points)

1)Soit $F(x) = \int_0^{\sqrt{\tan x}} \frac{t}{1+t^4} dt$ avec $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

a)Montrer que F est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $F'(x)$

b)Déduire que $F(x) = \frac{x}{2}$ et déduire $\int_0^1 \frac{t}{1+t^4} dt$

2)Soit pour tout $n \in IN$, $I_n = \int_0^1 \frac{t^{4n+5}}{1+t^4} dt$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k+2}$

a)Montrer que pour tout n, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4n+2}$ puis déduire la limite de (I_n)

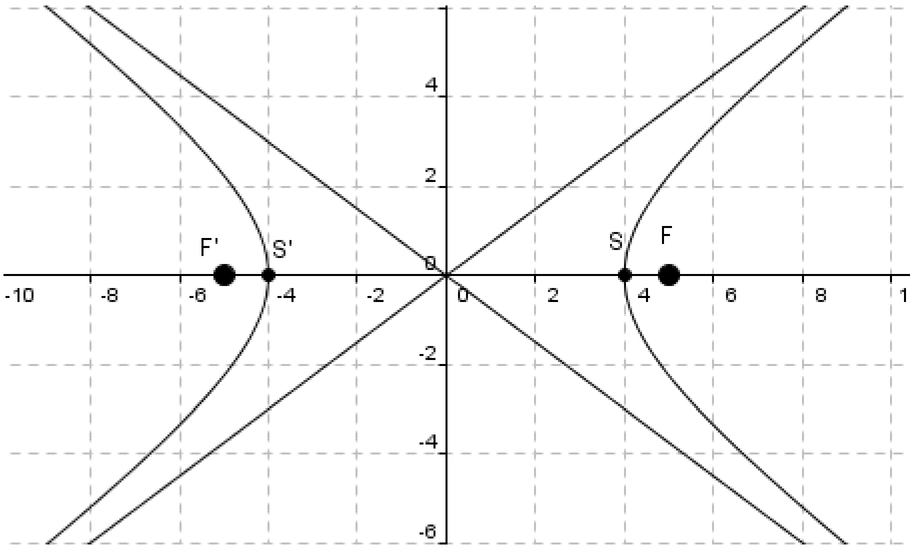
b)Montrer que pour tout n, $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{4n+2}$ puis déduire I_2

c)Montrer que pour tout n, $S_n - \frac{\pi}{8} = (-1)^n I_{n+1}$ et calculer la limite de (S_n)

Correction :

Exercice 1 :

1)M (x ,y) ∈ $H \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ Donc H est une Hyperbole de centre O , de sommets S(4,0) et S'(-4,0) , de foyers F(5,0) et F'(-5,0) , de directrices D : x = $\frac{16}{5}$ et D': x = $\frac{-16}{5}$ et d'asymptotes Δ: $y = \frac{3}{4}x$ et Δ' : $y = -\frac{3}{4}x$



3)a)On a : $9(\frac{4}{cos\theta})^2$ -16(3tan(θ) $)^2$ =

144(1 + (tanθ $)^2$)- 144(tan$\theta)^2$ = 144

Donc M ∈ H

b)Ona T : $\frac{x\frac{4}{cos\theta}}{16}$ - $\frac{y3tan\theta}{9}$ = 1 ⇔ $\frac{x}{4cos\theta} - \frac{ysin\theta}{3cos\theta}$ =1

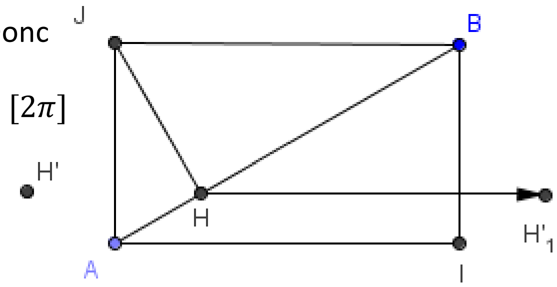
⇔ 3x - 4y sinθ = 12 cos θ

c)T_S :x= 4 et $T_{S'}$: x = -4 donc

P(4,$\frac{12-12\ cos\theta}{4sin\theta}$) soit P(4 , $\frac{3(1-cos\theta)}{\sin\ \theta}$) et

P'(-4 , $\frac{-3(1+cos\theta)}{sin\theta}$) d'où $\overrightarrow{SP}.\overrightarrow{SP'} = \frac{3(1-cos\theta)}{\sin\ \theta}.\frac{-3(1+cos\theta)}{\sin\ \theta}$ = - $\frac{9\ (sin\theta)^2}{(sin\theta)^2}$ = -9

Exercice 2 :



1)a)Soit k le rapport de S_1 et θ son angle comme s_1(B) = J et s_1(J) = A Donc

k = $\frac{JA}{BJ} = cotg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\theta \equiv (\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{JA}) \equiv \pi + (\overrightarrow{JB},\overrightarrow{JA}) \equiv \pi - \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b)On a $\frac{HJ}{HB} = tan\widehat{JBH} = tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

et $(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HJ}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et s_1(B)=J donc H est le centre de s_1

c)s_1os_1 est une similitude directe de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ donc s1os1 est une homothétie de rapport $\frac{-1}{3}$ et comme H est invariant par s_1os_1 donc H est le centre de l'homothétie s_1os_1

Comme s_1os_1(B)= A donc $\overrightarrow{HA} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{HB}$

2)Soit k' le rapport de s_2 et θ' son angle , comme s_2(B) = B et s_2(I) = J

donc k'= $\frac{BJ}{BI} = \frac{BJ}{JA} = tan\widehat{JAB} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ et $\theta \equiv (\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$

On a $\begin{cases} s_1 \text{ est une similitude directe de rapport } \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2} \text{ et} \\ s_2 \text{ est une similitude directe de rapport } \sqrt{3} \text{ et d'angle - } \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc s_1os_2 est une similitude directe de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ - $\frac{\pi}{2}$

Donc s_1os_2 est une similitude directe de rapport 1 et d'angle 0 ainsi s_1os_2 est une translation et comme

S_1os_2(B)=J alors s_1os_2 est une translation de vecteur $\overrightarrow{BJ}$

Ona $s_1 o s_2 = t_{\overrightarrow{BJ}}$ Donc $s_2 = (s_1)^{-1} o\, t_{\overrightarrow{BJ}}$ donc $s_2(H1) = (s_1)^{-1} o\, t_{\overrightarrow{BJ}}(H1) = (s_1)^{-1}(H) = H$

3)Soit k'' le rapport de g , comme g(B)=J et g(J) = A donc $k'' = \frac{JA}{JB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 1$ donc la similitude indirecte g admet un centre Ω

b)gog est une homothétie de centre Ω et de rapport $(k'')^2 = \frac{1}{3}$ comme gog(B)= A donc $\Omega \in (AB)$

c) $\begin{cases} \text{g est une similitude indirecte de rapport } \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et} \\ (s_1)^{-1} \text{ est une similitude directe de rapport } \sqrt{3} \end{cases}$

Donc $go(s_1)^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport 1 Donc go $(s_1)^{-1}$ est un antidéplacement

Or $go(s_1)^{-1}$ fixe les deux points J et A donc $h = go(s_1)^{-1} = S_{(JA)}$

h(H)=H' donc $go(s_1)^{-1}(H)$ =H' donc g(H)=H'

d)$\Omega \in (AB)$ et (AB) =(HB) donc $g(\Omega) \in g(HB)$ donc $\Omega \in$ (H'J)

Ainsi $\Omega \in (AB) \cap (H'J)$ et l'axe de g porte la bissectrice intérieure de $\widehat{B\Omega J}$

<u>Exercice 3 :</u>

1)a) on pose $f(t) = \frac{t}{1+t^4}$ t ∈IR et $u(x) = \sqrt{tanx}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

On a la fonction $x \to tanx$ est dérivable et >0 sur$]0, \frac{\pi}{2}[$ donc u est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

et f est dérivable sur IR donc F est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et F'(x) = u'(x) .f(u(x)) = $\frac{1+(tanx)^2}{\sqrt{tanx}} \frac{\sqrt{tanx}}{1+(tanx)^2} = \frac{1}{2}$

b)$F'(x) = \frac{1}{2}$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et F est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc $F(x) = \frac{1}{2}x + k$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

or F(0) =0 donc $F(x) = \frac{1}{2}x$. $\int_0^1 \frac{t}{1+t^4} dt = F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8}$

2)a)pour tout $t \in [0,1]$ on a $1 \leq 1 + t^4 \leq 2$ donc $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^4} \leq 1$ donc $0 \leq \frac{t^{4n+1}}{1+t^4} \leq t^{4n+1}$ donc $0 \leq I_n \leq [\frac{t^{4n+2}}{4n+2}]_0^1$

Ainsi $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4n+2}$

On a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4n+2}$ et $\lim \frac{1}{4n+2} = 0$ donc $\lim I_n = 0$

b)$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{4n+5}}{1+t^4} dt + \int_0^1 \frac{t^{4n+1}}{1+t^4} dt = \int_0^1 \frac{t^{4n+1}}{1+t^4}(1+t^4)\, dt = \int_0^1 t^{4n+1} dt = \frac{1}{4n+2}$

$I_2 = \frac{1}{6} - I_1$ et $I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$ donc $I_2 = \frac{-1}{3} + \frac{\pi}{8}$

c)*pour n=0, on a $S_0 - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = I_1$

*On suppose $S_n - \frac{\pi}{8} = (-1)^n I_{n+1}$ et montrons que $S_{n+1} - \frac{\pi}{8} = (-1)^{n+1} I_{n+2}$

On a , $S_{n+1} - \frac{\pi}{8} = Sn + \frac{(-1)^{n+1}}{4n+6} - \frac{\pi}{8} = (-1)^n I_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{4n+6} = (-1)^{n+1}(-I_{n+1} + \frac{1}{4n+6}) = (-1)^{n+1} I_{n+2}$ c.q.f.d