



La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

Exercice 1 (4 points)

1. Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.
2. Trouvez le reste de la division euclidienne de 2014^{2013} par 7.
3. Soit $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$.
 - a) Montrez que pour tout entier naturel n , X est divisible par 7.
 - b) Montrez que pour tout entier naturel n , X est divisible par 25.

Exercice 2 (4 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres x et y entiers relatifs tels que $31x + 28y = 1$.
2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $31x + 28y = 414$.
3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points $A(-30; 48)$ et $B(82; -76)$. On appelle (D) la droite (AB) .

- a. Trouver l'ensemble des points $M(x; y)$ de (D) dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.
- b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de -10 à $+10$ en abscisses et de -14 à $+14$ en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de (D) à coordonnées entières visible sur le graphique.
- c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à $[-40; +40]$ en abscisses et à $[-50; +10]$ en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

Exercice 3 (3 points)

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe direct. On construit quatre carrés de centres respectifs P, Q, R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB], [BC], [CD], [DA]$.

On considère un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) dans lequel les points A, B, C, D, P, Q, R et S ont pour affixes respectives a, b, c, d, p, q, r et s .

1) Le but de cette question est de démontrer que les segments $[QS]$ et $[PR]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

a) Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$ on a :

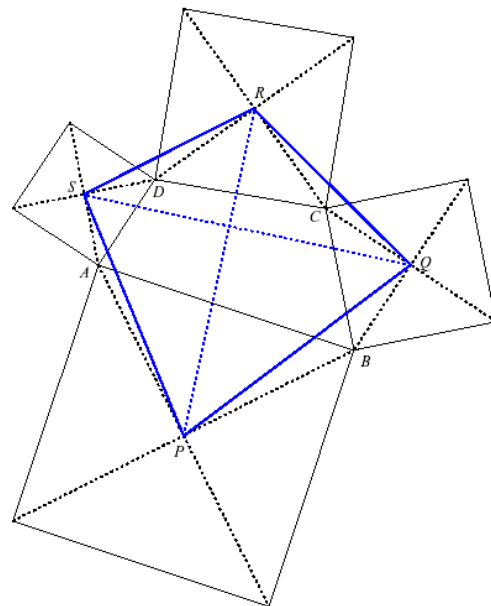
$$p = \frac{a - ib}{1 - i}$$

b) Etablir des relations analogues pour q, r et s .

c) Calculer $\frac{s - q}{r - p}$. Conclure.

2) Démontrer que les quadrilatère $ABCD$ et $PQRS$ ont le même centre de gravité.

3) Démontrer que si le quadrilatère $PQRS$ est un carré, alors $ABCD$ est un parallélogramme.



Exercice 4 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - (4 - 2i)z^2 + (4 - 6i)z - 4 + 8i$.

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de \mathbb{C} :

$$P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Soient A , B et C les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$.

a) Placer les points A , B et C .

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3), (A;-4), (B;1), (C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5), (B;-5), (G;2)\}$.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\frac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur.

Exercice 5 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 3 cm).

On désigne par A le point d'affixe i . À tout point M du plan, distinct de A , d'affixe z , on associe le point

M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{-z^2}{z-i}$. On note $f(M) = M'$.

1.a) Résoudre l'équation $z' = z$. En déduire les points M confondus avec leur image M' .

b) Montrer qu'ils existent deux points dont l'image est A . Déterminer leurs affixes.

c) Soit Δ l'axe des imaginaires purs; montrer que pour tout point M de Δ distinct de A , M' appartient à Δ .

2) Étant donné un complexe z distinct de i , on pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' réels.

Montrer que : $x' = \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1-y)^2}$. En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est située sur

l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble E .

3) Trouver une relation simple liant les longueurs OM , AM et OM' . En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O . Dessiner F sur la figure précédente.

4) Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z , situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. $M' = f(M)$, et G le centre de gravité du triangle AMM' .

a) Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z .

Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

b) Après avoir comparé les angles $(\vec{u}; \vec{OG})$ et $(\vec{u}; \vec{AM})$, effectuer la construction de G à partir d'une position donnée de M . En déduire celle de M' .

5) Dans cette question, on considère un point M d'affixe z , situé sur le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique). Montrer que M' est situé à l'extérieur d'un disque de centre O dont on précisera le rayon.

Fin.