Lycées Houmet Souk 1 & 2 **Profs : Loukil . M & Zayoud . A**	**Devoir de Contrôle N : 2** **Durée : 2 Heures**	**4 Mathématique** **11 Février 2012**

EXERCICE N : 1 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de centre O tel que AB = 2 AD et

$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On désigne par I le milieu de [AB] et $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au rectangle ABCD .

1) *Soit f la similitude indirecte qui transforme B en I et I en D .*

a) *Montrer que le rapport de f est $\sqrt{2}$.*

b) *Soit Ω le centre de f . Montrer que Ω est le symétrique de D par rapport au point B .*

c) *Construire l'axe Δ de f .*

2) *On pose $g = f \circ S_{(AB)}$.*

a) *Déterminer g (B) et g (I) .*

b) *Montrer que g est une similitude directe et préciser son rapport et son angle .*

c) *Montrer que C est le centre de g .*

3) *Soit A' = g (A) . Montrer que A' est le symétrique de I par rapport à D .*

4) *La demi-droite [CA') recoupe $(\mathscr{C})$ en O' . Prouver que O' = g (O) .*

EXERCICE N : 2 (3 points)

1) *Calculer l'intégral : $\ell = \int_1^2 \ln(t)\,dt$.*

2) *Soit $n \in IN^*$, Montrer que pour tout entier k , tel que $0 \le k \le n-1$ on a :*

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(t)\,dt \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right) .$$

3) *Soit la suite (J_n) définie sur IN^* par : $J_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.*

a) *Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $J_n - \frac{1}{n}\ln(2) \le \ell \le J_n$.*

b) *Montrer que la suite (J_n) converge vers ℓ .*

www.devoir@t.net © 2012

EXERCICE N : 3 (6 points)

1) a) *Déterminer le reste modulo 13 de* 5^4 .

b) *En déduire les restes modulo 13 de chacun des entiers* 5^{4k}, 5^{4k+1}, 5^{4k+2} *et* 5^{4k+3} *avec* $k \in \mathbb{N}$.

c) *Déterminer alors le reste de la division euclidienne par 13 de :* $a = 1318^{2012} + 91^{2011}$.

d) *Déterminer les entiers naturels* n *tels que :* $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$.

2) *Soit la suite* (U_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} 5^k = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{n-1}$.

a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $4U_n = 5^n - 1$.

b) *Montrer que* U_{2012} *est divisible par 13* .

c) *En utilisant la question* **1) b)** *déterminer suivant les valeurs de n les restes modulo 13 de* U_n .

EXERCICE N : 4 (6 points)

Soit la fonction f *définie par :* $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$.

On désigne par **(C f)** *la courbe de f dans le repère orthonormé* $R(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(Unité 2 cm)**

On donne la fonction φ *définie sur* $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ *par :* $\varphi(x) = \int_0^{\sqrt{\sin x}} f(t)\,dt$.

1) a) *Montrer que* φ *est continue sur* $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ *et dérivable sur* $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ *et calculer* $\varphi'(x)$.

b) *En déduire que pour tout* $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, $\varphi(x) = \frac{x}{2}$.

c) *Trouver alors l'aire* **A** *de la région du plan limitée par la courbe* **(C f)** *et les droites d équations :*

$x = 0$ *et* $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) *On pose :* $\psi(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\sin x}} \frac{\sqrt{1-t^4}}{t^3}\,dt$.

a) *Justifier l'existence de* $\psi(x)$ *pour tout* $x \in [\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}]$.

b) *A l'aide d'une intégration par parties , prouver que pour tout* $x \in [\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}[$:

$$\psi(x) = \frac{\pi}{12} + \frac{(\sqrt{3} - x) - \cot g\, x}{2} .$$

c) *Déterminer alors la valeur de* $\psi(\frac{\pi}{2})$. *Justifier la réponse*

© 2012 www.devoir@t.net