Devoir de contrôle # 2.

Durée : 2 h

Pr : Ben fredj sofiane

Exercice 1 (4 points). Répondre par Vrai ou Faux. En justifiant la réponse.

1– $ABCD$ un carré tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, alors :

(a) La transformation $S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{CB}} \circ S_{(CD)}$ est une translation.

(b) La transformation $R_{(B,\frac{\pi}{2})} \circ S_{(BD)}$ est une symétrie orthogonale.

2– Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

(a) Soit E' l'image d'un point E d'affixe i par la rotation de centre F d'affixe $(2+i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ alors l'affixe de E' est : $2+3i$

(b) L'application σ du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = i\bar{z}+1$. est une symétrie orthogonale.

Exercice 2 (6 points). Dans le plan orienté, on donne un triangle ABC tel que :

$$(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ avec } CB > AC$$

Soit D le symétrique de C par rapport la droite (AB) et soit E l'image de D par la rotation de centre C et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$

1– Construire E. (Utiliser la figure donnée au feuille annex.)

2– Soit $f = S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AC)}$.

(a) Montrer que $f(E) = C$ et $f(C) = D$

(b) I, J désignent les milieux respectifs des segments $[EC]$ et $[CD]$. Montrer que f est une symétrie glissante que l'on précisera l'axe et le vecteur.

3– (a) Montrer qu'il existe un unique déplacement g tel que $g(D) = C$ et $g(C) = E$.

(b) Montrer que g est une rotation que l'on précisera l'angle. Construire son centre Ω.

(c) Montrer que I, C, J et Ω appartiennent au même cercle.

4– Pour tout point M du plan, on note $N = f(M)$ et $P = g(N)$. Déterminer l'ensemble des milieux des segments $[MP]$ lorsque M varie.

EXERCICE 3 (4 points). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt$

1– Calculer U_0 et U_1.

2– Montrer que (U_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.

3– Calculer à l'aide de n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1+t)^n dt$.

4– Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $U_n \leq \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$

5– Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{2^n}$.

EXERCICE 4 (6 points). Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{1+\tan x} g(t)dt \text{ où } g(t) = \frac{1}{t^2-2t+2}$$

1– a– Montrer que φ est dérivable sur I puis calculer $\varphi'(x)$ pour $x \in I$.

b– Préciser $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ puis déduire l'expression $\varphi(x)$ à l'aide de x où $x \in I$.

c– Déduire la valeur de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{t^2-2t+2}$.

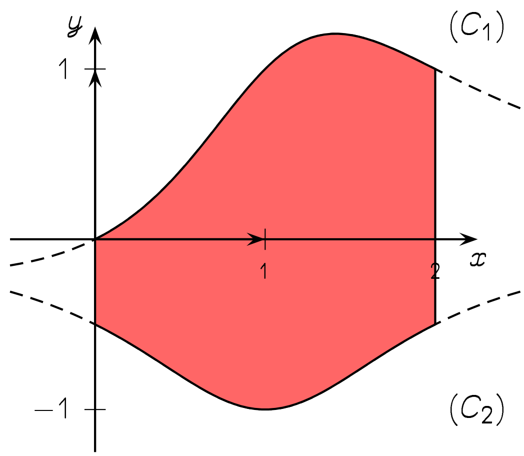
2– Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{t}{1+(t-1)^2}$.

a– Montrer que f possède une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

b– Vérifier que pour tout réel t, $\dfrac{2-t}{1+(t-1)^2} = f(2-t)$.

c– Déduire que $\displaystyle\int_0^2 \frac{2-t}{1+(t-1)^2}dt = F(2)$ puis déduire que $\displaystyle\int_0^2 \frac{t}{1+(t-1)^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

3– On donne dans la figure ci-dessous les courbes (C_1) et (C_2) respectives des fonctions f et $-g$. Calculer en unité d'aire, l'aire de la partie du plan colorée.



FEUILLE ANNEX

Nom :.................

Prénom :..............