Epreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n 2	Durée :2h
Prof: MAATALLAH	Le 14 - 02 - 2011	Classe : 4 M 2

EXERCICE N1 :(7 points)

Dans le plan orienté , on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en B tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ .On construit à l'extérieur du triangle ABC le triangle isocèle et rectangle ACD tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC] .

1/ a) Préciser le rapport et l'angle de la similitude directe S de centre A telle que S(B)=C .

b) Vérifier que S(C)=D .

2/ Soit f la similitude directe telle que f(C)=B et f(A)=J .

a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de f .

b) On note $g = f \circ S$. Préciser g(B) puis donner la nature et les éléments caractéristiques de g .

3/ a) Soit E=f(D) . Montrer que les droites (AC) et (JE) sont perpendiculaires .

b) Montrer que l'image de la droite (CD) par f est la droite (AB) . Construire E .

4/ Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(A) = J$ et $\sigma(C) = I$ et h l'homothétie de centre B et de rapport 2.

Donner les éléments caractéristiques de $\varphi = h \circ \sigma$. Donner, alors , la forme réduite de σ.

EXERCICE N2 :(6points)

Soit OAB un triangle rectangle et isocèle en O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $OB = 2$. On pose $I = O * A$, $J = O * B$ et $K = A * B$. On désigne par S la similitude directe telle que S(A)=K et S(K)=J.

1/ a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S . Montrer que O est le centre de S .

b) On considère le repère orthonormé R= $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ .Déterminer l'application complexe associée à S .

2/ Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points M(x,y) vérifiant : $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y = 0$, selon le repère R .

a) Soit M(x,y) et M'(x',y') tel que M'=S(M). Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

b) Donner alors une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$ image de $\mathscr{P}$ par S .

c) Montrer que $\mathscr{P}'$ est une parabole dont on précisera le foyer F' et la directrice D' . Construire $\mathscr{P}'$

d) En déduire que $\mathscr{P}$ est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

EXERCICE N3 :(7points)

Soit F la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ par : $F(x) = \int_0^{\tan(2x)} \frac{dt}{1+t^2}$

1/ Montrer que F est dérivable sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ et calculer $F'(x)$ .En déduire $F(x)$ puis calculer $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{1} \frac{dt}{1+t^2}$.

2/ On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $U_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le U_n \le \frac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3/ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = (-1)^n U_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ .Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = U_0 - S_n$.

4/ Exprimer S_n a l'aide de U_0 et U_{n+1} . En déduire que (S_n)est convergente et déterminer sa limite .

Bon travail