EXERCICE : 1

Soit $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$

On donne les points A (1,- 2,- 1), B (1,3,1) et C (5,6,5)

1a) déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés puis calculer l'aire du triangle ABC

2a) calculer le volume du tétraèdre OABC

b) en déduire la distance du point O au plan (ABC)

3) calculer le volume du parallélépipède ayant pour arêtes [OA] , [OB] et [OC]

EXERCICE : 2

Soit S = $\{M(x,y,z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0\}$ et P : $2x - 2y - z + 1 = 0$

1) montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R

2) montrer que le plan P coupe S suivant un cercle dont on précisera le centre H et le rayon r

3) soit Δ la droite passant par B(1,1,1) et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$

a) déterminer une représentation paramétrique de Δ

b) calculer la distance du point D à la droite Δ

c) montrer que la droite Δ coupe la sphère S en deux points dont on déterminera les coordonnées

EXERCICE : 3

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = 2 + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$

1a) dresser le tableau de variation de f

b) donner une équation de la tangente T au point d'abscisse 0

c) vérifier que le point I(0,2) est un centre de symétrie

2) construire T et $\mathscr{C}_f$

3)a) montrer que f est bijective de ℝ sur un intervalle J que l'on précisera

b) construire $\mathscr{C}_f^{-1}$ dans le même repère que $\mathscr{C}_f$

4) déterminer la primitive de f qui s'annule en 0

EXERCICE : 4

Soit la fonction f définie sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$

1) dresser le tableau de variation de f

2) montrer que f est bijective de $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera

3) montrer que f^{-1} est dérivable sur]0,2 [et que $\forall x \in]0,2[$ $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{2x - x^2}}$

4) on pose $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(2 - x)$ pour $x \in]0,2[$

a) déterminer g'(x)

b) calculer g(1) en déduire que $\forall x \in]0,2[$,g(x) = 0

c) interpréter géométriquement le résultat obtenu c)

Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=1+\sin(\pi x)$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à préciser

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,2[$ et que pour tout $x\in]0,2[$ on a $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

4) On pose $\rho(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(2-x)$ pour tout $x\in]0,2[$

a) Montrer que ρ est dérivable sur $]0,2[$ et donner $\rho'(x)$

b) Calculer $\rho(1)$. En déduire que pour tout $x\in[0,2]$ on a $f^{-1}(x)+f^{-1}(2-x)=0$

c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu

5) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+K}\right)$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\frac{n+1}{n}f^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\le u_n\le\frac{n+1}{n}f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b) En déduire $\lim u_n$