Lycée Houmet Souk	Devoir de Contrôle N : 2	4 Mathématique 1
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	19 - 02 - 2019

EXERCICE N : 1 (4.5 points)

Soit $f : P \to P$; $M_{(Z)} \mapsto M'_{(Z')}$ avec : $Z' = \frac{1-i}{2} Z - 2 + 2i$.

1) a) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω , le rapport et l'angle .

b) On pose M (x , y) et M' (x' , y') . Exprimer x et y en fonction de x' et y' .

2) On donne la courbe **(Γ)** d'équation : $xy - 2x - 3y - 1 = 0$ et $f(\Gamma) = \Gamma'$.

a) Montrer que **(Γ')** a pour équation : $x'^2 - y'^2 - x' + 3y' - 9 = 0$

b) Prouver que **(Γ')** est une hyperbole et donner son centre , ses foyers et ses directrices .

c) En déduire la nature de **(Γ)** et ses caractéristiques .

EXERCICE N : 2 (7 points)

Dans un plan orienté ,on considère le losange ABDC de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv 2\alpha \, (2\pi)$

où $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et BC = 2 unités . **(Pour le traçage de la figure on prend $\alpha = \frac{\pi}{6}$)**

On désigne par K et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC) et par $E = S_K(O)$.

A) 1) Soit **S** la similitude directe qui transforme B en O et C en E .

a) Montrer que S a pour angle α et pour rapport $\cos\alpha$.

b) Prouver que A est le centre de **S** .

2) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(B) = O$ et $\sigma(C) = E$.

a) Prouver que σ admet un centre qu'on note Ω .

b) Montrer que $\sigma(O) = K$ puis déduire que $\overrightarrow{\Omega K} = \cos^2\alpha \, \overrightarrow{\Omega B}$.

c) Montrer que $\frac{JK}{BD} = \cos^2\alpha$ puis déduire que $\sigma \circ \sigma(D) = J$.

d) Construire Ω et l'axe Δ de σ .

B) Dans cette partie on munit le plan du repère orthonormé direct $R(O, \overrightarrow{OC}, \vec{v})$.

1) Prouver que : $Z_K = \cos^2\alpha + i\cos\alpha\sin\alpha$.

2) Montrer que : $Z_\Omega = 2\,\text{cotan}^2\alpha + i\,\text{cotan}\,\alpha$.

3) On suppose que B et C sont fixes , prouver alors que lorsque α décrit $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ le point Ω

varie sur une parabole fixe ($\mathscr{P}$) dont on précisera le sommet , le foyer F et la directrice ($\mathscr{D}$) .

EXERCICE N : 3 (8.5 points)

Pour tout $n \in IN^*$ on note f_n la fonction définie sur $[\,0\,,+\infty\,[$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

*On désigne par **(C_n)** la courbe de f_n dans le repère **orthogonal** $R\,(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ tel que : $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=10$*

A) 1) a) *Etudier les variations de f_1 sur $[\,0\,,+\infty\,[$.*

b) *Pour tout $n \in IN^* \setminus \{1\}$, dresser le tableau de variations de f_n sur $[\,0\,,+\infty\,[$.*

2) *Pour tout $n \in IN^*$, étudier les positions relatives de **(C_{n+1})** et **(C_n)** .*

3) *On a tracé dans l'annexe les courbes **(C_1)** et **(C_3)** .*

a) *Sans justification , graduer le repère puis nommer sur l'annexe les deux courbes .*

b) *Tracer **soigneusement** la courbe **(C_2)** ainsi que les demi-tangentes à l'origine pour chacune des trois courbes .*

B) *On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par : $U_n = f_n(n)$.*

1) a) *En utilisant les résultats de la parie **A)** démontrer que (U_n) est décroissante sur IN^* .*

b) *(U_n) est-elle convergente ? (Justifier votre réponse) .*

2) a) *Montrer que pour tout $t \in [\,0\,,1]$, $\dfrac{1}{1+t} \le 1 - \dfrac{t}{2}$.*

b) *Déduire que pour tout $x \in [\,0\,,1\,]$; $\ln(1+x) \le x - \dfrac{x^2}{4}$.*

c) *Prouver alors que pour tout $n \in IN^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \le e^{1-\frac{1}{4n}}$*

3) a) *Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \le e^{-\frac{1}{4n}}$.*

b) *En déduire que pour tout $IN^* \setminus\{1\}$ on a : $U_n \le e^{-\left(1+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)}$.*

4) a) *Connaissons que pour tout $k \in IN^*$ et $t \in [\,k\,,k+1]$ on a : $\dfrac{1}{t} \le \dfrac{1}{k}$,*

montrer que pour tout $n \in IN^* \setminus\{1\}$ on a : $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

b) *En déduire que pour tout $n \in IN^* \setminus\{1\}$ on a : $U_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\ln(n)}$.*

c) *Déterminer alors la limite de la suite (U_n) .*

Bonne chance

__Nom et Prénom__ :

__Annexe à rendre avec la copie__