| LYCEE NAHJ EL MENZEH<br><br>BENI KHALLED | DEVOIR DE CONTROLE N°2 | Pr . KADDOUR ABDELHAMID<br><br>NIVEAU : 4è MATH<br><br>Durée 2H |
|---|---|---|

EXERCICE N°1 (5points)

1) Montrer que 9 divise $10^{11} - 1$ $et$ $10^{24} - 1$

2)Soient m et n deux entiers naturels tel que 11n - 24m = 1

a) Montrer que $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$

b)Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$

(On rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0)$)

c)Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que

$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$

d)Montrer que tout diviseur commun de $10^{24} - 1$ $et$ $10^{11} - 1$ divise 9

e) Déduire le PGCD de $10^{24} - 1$ $et$ $10^{11} - 1$

EXERCICE N°2 (6points)

Soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct tel que AB = 2 AC . H est le pied de la hauteur issue de A . Le point D est tel que ACD soit un triangle rectangle en A isocèle et directe . O est le pied de la hauteur issue de D dans le triangle DBC . K est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle DAO . Les droites (HK) et (AB) se coupent en $\omega$ et r = R(A, $\pi/2$)

1) a- Montrer que r((BC)) = (OD)

b- En déduire que r(H) = K et que AHOK est un carré

2) Soit h l ' homothétie de centre $\omega$ et telle que h(K) = H . Montrer que h(A) = B et h(D) = A

3) On pose S = ho r

a- Determiner S(A) , S(C) et S(H)

b - Déterminer la nature et les éléments caractéristique de S

4 ) On pose $\sigma$ = So $S_{(BC)}$

a- Déterminer $\sigma$ ( C) et $\sigma$(H) . Caractériser alors $\sigma$

b- Déterminer $\sigma$(OA)

5) On pose $\sigma$ ' = So $S_{(AC)}$ et (d) = $S_{(AC)}$ ((AH))

a- Montrer que $\sigma$ ' est une similitude indirecte , préciser son rapport

b- Soit $\Omega$ le centre de $\sigma$ ' et $\Delta$ son axe . Montrer que ($\sigma$'o$\sigma$') (C) = B , en déduire que $\Omega$ € (BC) c- Montrer que(d) est perpendiculaire à $(C\omega)$ et $\sigma$ '(BC) = (d) , en déduire que $\Omega$ = (d) $\cap$(BC)

Construire $\Delta$

EXERCICE N°3 (4points)

1) Démontrer que pour tout n de $IN^*$ et tout x de [0 , 1] on a

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

2)Déduire que pour n de $IN^*$ on a : $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

3) Soit $((u_n)$ $et$ $(v_n)$ les suites définies sur $IN^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ - ln (n) et

$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$ - ln(n+1)

a)Montrer que ces deux suites sont adjacentes

b) Donner un encadrement à $10^{-2}$ de leur limite

EXERCICE N°3 (6points)

A- 1)Soit g la fonction définie sur ]0,+$\infty$ [ par g(x) = 1 + x² -2x² ln(x)

a- Dresser le tableau de variation de g .

b- Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique $\alpha$ sur ]0,+$\infty$[et que 1,8<$\alpha$<1.9

c- Déduire le signe de g(x) sur ]0,+$\infty$[.

2) Soit f la fonction définie sur ]0,+$\infty$[ par f(x) = $\frac{lnx}{1+x^2}$

Etudier f et construire sa courbe dans un repère orthonormé (o,i,j

B- Soit x € ]0,+$\infty$[ et F et G les fonctions définies par

F(x) = $\int_1^x \frac{lnt}{t^2+1}\, dt$ et G(x) = $\int_1^x \frac{lnt}{t^2}\, dt$

1) a- Calculer G(x) et montrer que pour tout x € ]1,+$\infty$[, G(x) $\leq$1.

b- Montrer que pour tout x € ]0,+$\infty$[, F(x) $\leq$ G(x).

2) a- Montrer que F est dérivable sur ]0 ,+$\infty$[ et calculer F'(x) .

b) Déduire le sens de variation de F.

c- Montrer que F admet une limite finie l en +$\infty$

3) Montrer que F(1/x ) = F(x). Déduire la limite en 0 de F(x).

4) Construire l'allure de la courbe de F ( on prenant l = 1)