

Mathématiques 4 ^{ème} Maths	DEVOIR DE CONTRÔLE N° 2 Durée : 2 heures	Professeur Elabidi Zahi
Année scolaire : 2015 // 2016		

EXERCICE 01 (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la courbe \mathcal{P} d'équation $y^2 - x + y = 0$

- 1) Montrer que \mathcal{P} est une parabole dont précisera le foyer F et la directrice \mathcal{D}
- 2) Vérifier que $A(2;1) \in \mathcal{P}$ et déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{P} en A
- 3) Déterminer les coordonnées du point B de \mathcal{P} tel que la tangente à \mathcal{P} en ce point est perpendiculaire à \mathcal{T}

EXERCICE 02 (7points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle $ABCD$ de centre O tel que $AB = 2AD$ et $(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$

La perpendiculaire à la droite (AC) passant par I coupe (CD) en E

Soit S la similitude directe telle que $S(A) = I$ et $S(B) = J$

- 1) Déterminer le rapport k et une mesure de l'angle θ de S
- 2) a) Déterminer les images des droites (AC) et (BC) par S
b) Déterminer alors $S(C)$
- 3) Soit Ω le centre de S
 - a) Montrer que $S \circ S$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$
 - b) Montrer que $S \circ S(A) = O$. En déduire que $\Omega \in (AO)$
 - c) Soit $H = I * E$. Montrer que $S \circ S(I) = H$. En déduire que $\Omega \in (IH)$ et construire Ω
- 4) Soit φ la similitude indirecte de centre Ω qui envoie I sur A
 - a) Déterminer le rapport de φ
 - b) Construire l'axe Δ de φ
 - c) Soit F le symétrique de Ω par rapport à I .
Montrer que Δ est la médiatrice du segment $[AF]$

EXERCICE 03 (9points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f
b) Vérifier que la droite $\Delta : x = 1$ est un axe de symétrie de ζ

- c) Préciser les branches infinies de ζ
d) Tracer ζ
- 2) Soit F la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \int_1^{1+\tan x} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$
- a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x) = 1$
- b) En déduire que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = x$ et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \frac{\pi}{4}$
- 3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
- $$\int_1^2 \ln(t^2 - 2t + 2) = 2 \ln 2 - 2 \int_1^2 \frac{t^2 - t}{t^2 - 2t + 2} dt$$
- b) Vérifier que pour tout réel t , $\frac{t^2 - t}{t^2 - 2t + 2} = 1 + \frac{t - 1}{t^2 - 2t + 2} - \frac{1}{t^2 - 2t + 2}$
- c) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

