

Profs	Mechmeche Imed	Devoir de contrôle N°2	Matière	Maths
Lycée	Nabhani		Date	07/12/2017
Niveau	4 ^{ème} Maths		Durée	2 h

Exercice 1 : (4 pts)

Donner la bonne réponse avec justification.

- Soit U la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $U_n = n^2 \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ alors
 - $\lim U_n = \pi^2$; b) $\lim U_n = \frac{1}{2}$; c) $\lim U_n = +\infty$
- f est une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ on pose $U_n = n f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ alors
 - $\lim U_n = 0$; b) $\lim U_n = f'(0)$; c) $\lim U_n = +\infty$
- f est une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[0,1[$ et U la suite définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = f^{-1}\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ alors
 - $\lim U_n = 1$; b) $\lim U_n = 0$; c) $\lim U_n = +\infty$
- (U_n) et (V_n) sont deux suites telles que $(U_n + V_n)$ et $(U_n - V_n)$ convergent alors :
 - (U_n) et (V_n) convergent
 - (U_n) et (V_n) divergent
 - on ne peut pas conclure

Exercice 2 : (8 pts)

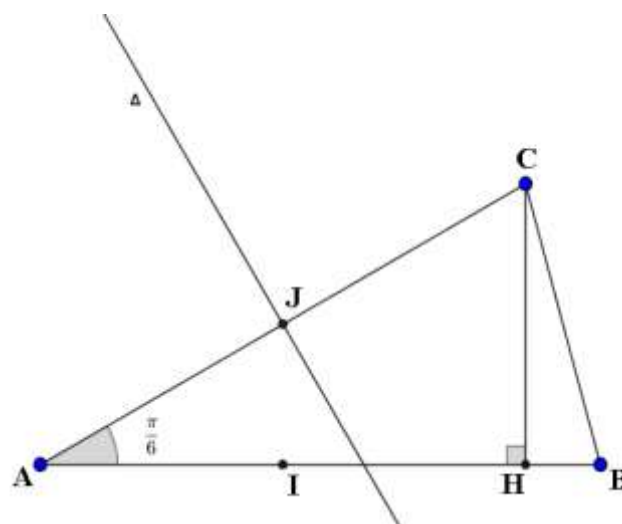
Dans la figure ci-contre ABC est un triangle isocèle en

A tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

I et J les milieux respectifs des segments $[AH]$ et $[AC]$

Δ est la médiatrice de $[AC]$.



- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(C) = A$ et $f(H) = J$
 - Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur
 - Soit D le symétrique de H par rapport à J , montrer que $f(J) = D$
 - Montrer que $f((AB)) = \Delta$
 - La parallèle à (AC) passant par D coupe Δ en K , montrer que $f(I) = K$
- Soit $g = S_{\Delta} \circ f$
 - Déterminer $g(H)$ et $g(C)$
 - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g
 - Montrer alors que le triangle CIK est équilatéral
 - on pose $f(B) = P$, montrer que $g(B) = P$ et en déduire que $P \in \Delta \cap \Delta'$ où $\Delta' = med[CB]$
 - Soit $h = R_{\left(J, \frac{-\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{HJ}}$ montrer que $h = g$
- Soit $L = A * D$ en utilisant le fait que $f(I) = K$ et que $h = g$ prouver que :
 - (HJ) est la médiatrice de $[KL]$
 - Le triangle JLK est équilatéral.

- 4) On munit le plan du repère orthonormé direct (A, \vec{u}, \vec{v}) avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- Déterminer l'écriture exponentielle de Z_C affixe du point C
 - Déterminer l'écriture complexe de g
 - En déduire les coordonnées du point P

Exercice 3 : (8 pts)

- Soit la fonction f définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \frac{2\sqrt{1-x}}{x}$
 - Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter le résultat graphiquement.
 - Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution a dans $]0,1[$ et que $0.8 < a < 1$
 - Montrer que f est une bijection de $]0,1[$ sur $[0, +\infty[$
 - prouver que f^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$
 - tracer les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé.
- Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ $f^{-1}(x) = \frac{2}{1+\sqrt{1+x^2}}$
- Soit h la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \begin{cases} f^{-1}(\tan x) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
 - Montrer que h est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
 - Vérifier que $h(x) = \frac{2 \cos x}{1 + \cos x}$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
 - En déduire que h est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $h'(x)$
 - Montrer que h réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera
- Montrer que h^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$ et expliciter $(h^{-1})'(x)$ en fonction de x

Bon travail