Lycée privé « Les lumières » Date : 12/2022	Devoir de synthèse N°1 Mathématiques	Classe : 3 Sc Durée : 2 H

N.B : 1 point pour la présentation de la copie.

EXERCICE N°1 : (4 points)

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique de centre O et A un point de $(\mathcal{C})$.

Soient B, C et D les points tels que $mes\widehat{AB} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $mes\widehat{AC} \equiv \frac{77\,\pi}{6}\ [2\pi]$ et

$mes\widehat{AD} \equiv \frac{127\,\pi}{6}\ [2\pi]$

1) Donner les mesures de $\widehat{AC}$ et $\widehat{AD}$ qui appartiennent à $[0,2\pi[$.
2)
   a) Placer les points A, B et C sur le cercle $(\mathcal{C})$.
   b) Donner la mesure de $\widehat{BC}$ qui appartient à $[0,2\pi[$.
   c) Montrer que OBCD est un losange.

EXERCICE N°2 : (7 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct ; l'unité est le cm.

Soit $ABCD$ un carré de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $AB = 6$. on considère les points E de $[AB]$ et F de $[BC]$ tels que $AE = BF = 2$.

1) Faire une figure.
2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}$.
3) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Calculer alors $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BF}$.
4) Déterminer l'ensemble $(E) = \{M \in P \ tels\ que\ MA^2 + MC^2 = 44\}$.
5) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon AI . Soient H et K deux points de $(\mathcal{C})$ tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{17\,\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{7\,\pi}{2}\ [2\pi]$.
   a) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC})$.
   b) Montrer que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
   c) Montrer que A est le milieu de $[HK]$.
   d) Calculer $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$ et en déduire la distance HB.

EXERCICE N°3 : (8 points)

I. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1} - 1}{x}$

1)

a) Déterminer le domaine D de définition de f.

b) Montrer que f est continue sur les intervalles $]-\infty, 0[\ et\ ]0, +\infty[$

2)

a) Montrer que, pour tout $x \in D,\ f(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}+1}$

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et définir son prolongement g.

c) Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$

d) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$

II. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}+1} & si\ \ x \leq -1 \\ h(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x^2+3x+2} & si\ \ x > -1 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x)\ \ et\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} h(x)$.

2) La fonction h est-elle continue en -1 ? justifier la réponse.

III. On admet que le tableau de variation de h est :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		$+\infty$
$h(x)$			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				2
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-1				-1		

1) Déterminer $h(]-\infty, -1])\ et\ h(\mathbb{R})$.

2) Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(x) + x$

a) Montrer que la fonction k est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

b) Montrer que l'équation $k(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha \in [-1,0]$

c) Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.