Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 1** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 16 /12 / 2015	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (4 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+3 & si\ x\le 1 \\ 1+\sqrt{x^2+3x} & si\ x>1 \end{cases}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue sur IR.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x>1$, $\sqrt{x^2+3x}-x=\dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1}$.

$b/$ En déduire que la droite $\Delta : y=x+\dfrac{5}{2}$ est une asymptote de $\mathscr{C}_f$.

3) $a/$ Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1.

$b/$ Donner une approximation affine de $f(0{,}99)$.

Exercice n°2 : (5 pts)

1) Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;1[$ par : $g(x)=\dfrac{4x^2-3x}{1-x}$.

$a/$ Montrer que, pour tout $x\in]-\infty\,;1[$, $g'(x)=\dfrac{-4x^2+8x-3}{(1-x)^2}$.

$b/$ Etablir le tableau de variations de g.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit m un réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{3}{4}\right[$, on désigne par T_m la tangente à $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse m.

$a/$ Ecrire, en fonction de m, une équation de T_m.

$b/$ La tangente T_m coupe $(O,\vec{i})$ en un point N.

Montrer que $ON=-\dfrac{1}{6}g(m)$.

$c/$ Déterminer la valeur de m pour laquelle la distance ON est maximale.

Exercice n°3 : *(5 pts)*

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. A' est le point de $[BC]$ tel que $CA'=CA$. *(voir annexe)*

1) $a/$ Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A)=A'$ et $R(B)=C$.

   $b/$ Construire le centre O de R et déterminer une mesure de son angle.

2) Soit $C'=R(C)$. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CC'}\right)$, en déduire que les points A, C et C' sont alignés. Construire C'.

3) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

   $a/$ Définir et construire le cercle $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par R.

   $b/$ Soit M un point de $\mathscr{C}$ distinct de B et soit $M'=R(M)$. Les droites (BM) et (CM') se coupent en N.

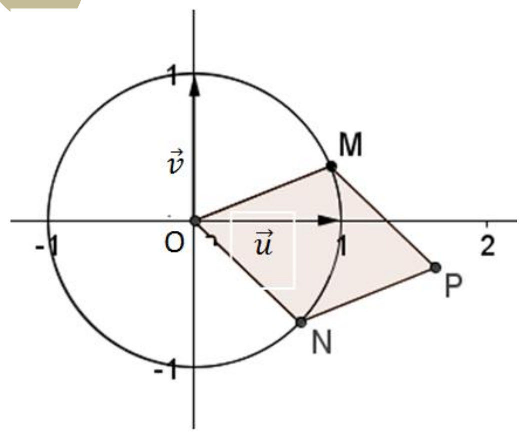
   Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NC}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)[2\pi]$.

   $c/$ En déduire que lorsque M varie sur $\mathscr{C}$, N varie sur le cercle circonscrit au triangle OBC.

Exercice n°4 : *(6 pts)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O, M et N sont deux points de $\mathscr{C}$ tels que :



$\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \theta[2\pi]$ et $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv -2\theta[2\pi]$. Où θ est un réel. Soit P le point tel que $OMPN$ est un losange.

1) $a/$ Déterminer en fonction de θ, les coordonnées cartésiennes des points M et N.

   $b/$ En déduire que P a pour coordonnées cartésiennes $(\cos\theta+\cos 2\theta\ ;\ \sin\theta-\sin 2\theta)$.

2) Dans cette question, on suppose que $\theta \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

   $a/$ Vérifier que $OMPN$ est un carré.

   $b/$ Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OP})$.

   $c/$ En déduire les coordonnées polaire de P.

   $d/$ Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) θ étant quelconque maintenant.

   $a/$ Montrer que, pour tout réel θ on a : $OP^2=2(1+\cos 3\theta)$.

   $b/$ Déterminer l'ensemble des réels θ dans $[0\ ;\ \pi[$ tels que $P \in \mathscr{C}$.

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synthèse n°1 *(16 – 12 – 2015)*

Nom et prénom :………………………………………………　　　　*Classe : 3 ème Math*