Lycée Ibn Khaldoun Jammel
A.S 2015/2016

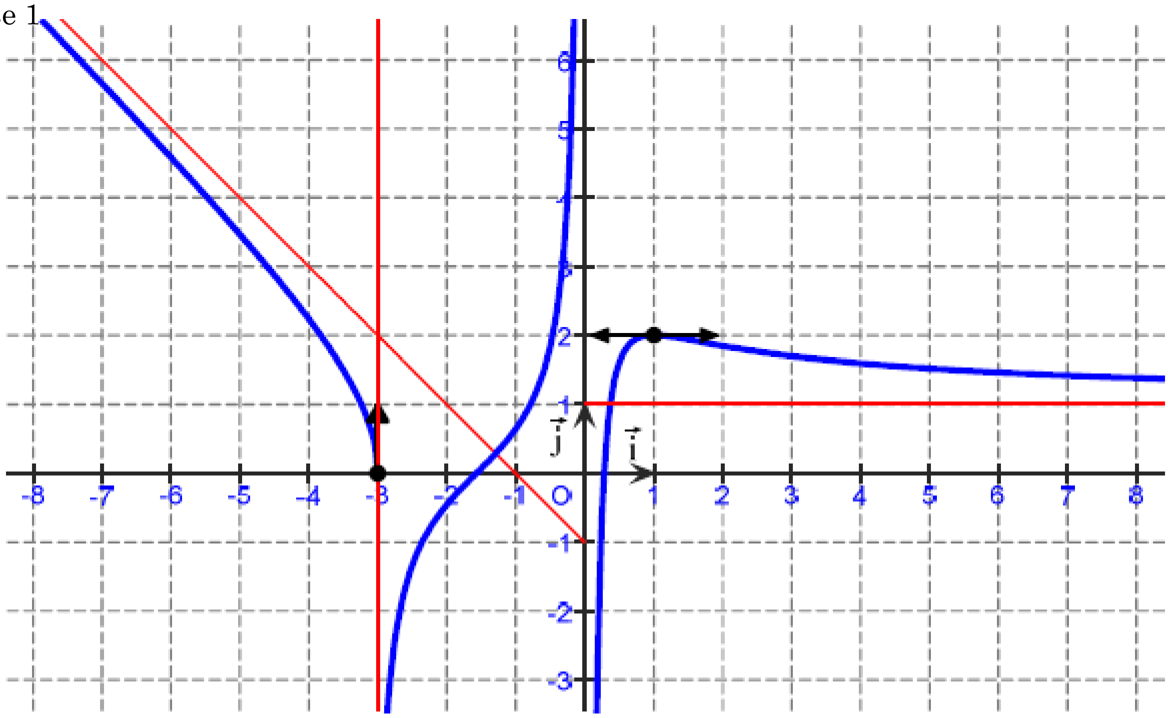
# Devoir de Synthèse n°1
Mathématiques

Mr : Afli Ahmed
Classe : 3M
Durée : 120mn

## ❖ Exercice n°1 :(4points)

La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

- La droite d'équation : $x = -3$ est une asymptote à (C) .
- La droite d'équation :$y = -x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$ .
- La droite d'équation y = 1 est une asymptote à (C) ay voisinage de $+\infty$
- L'axe des ordonnée est une asymptote à (C)
- La courbe (C) admet une demi tangente verticale à gauche au point d'abscisse -3 et une tangente au point d'abscisse 1




**Par lecture graphique :**

1. Déterminer le domaine de définition de f .

2. a. Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

   b. Déterminer f '(1)

   c. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x - 2]$

3. f est-elle dérivable à gauche en (-3) ? Déterminer $\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{-f(x)}{x+3}$

4. Soit g la fonction définie sur [0,5 ; +∞[ par g(x) = $\sqrt{f(x) + 2x}$

   a. Montrer que $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{g(x) - 2}{x - 1} = \frac{1}{2}$

   b. Ecrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

❖ **Exercice n°2 :** (6points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ ,on donne le point A de cordonnées polaires $(2\ ;\frac{\pi}{3})$

Et le point B de coordonnées cartésiennes$(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

1. a. Déterminer es coordonnées cartésiennes de A et les coordonnées polaires de B.

   b. Placer les points A et B dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

2. a. Calculer $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ *et* $\sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ .

   b. En déduire que $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$

3. Soit $f(x) = \left(2+\sqrt{3}\right)\cos(x) + \sin(x)$.

   a. Montrer que $f(x) = 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

   b. Résoudre ,dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\left(2+\sqrt{3}\right)\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}$.

❖ **Exercice n°3 :** (4points)

**A]**.1.Soit $A = cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}$ . Mettre A sous forme $r cos(\frac{\pi}{5}-\varphi)$.

2. Calculer alors $B = \dfrac{cos\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)}$

**B]**. Soit x un réel de $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

1. Montrer que : $\tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{2}{\sin(2x)}$

2. Montrer alors que $\tan^2(x) + \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{4}{sin^2(2x)} - 2$.

3. Déduire alors que $\tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 14$

❖ **Exercice n°4 :** (6points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} & si\ x \leq 0 \\ \frac{-x^2-x+2}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a. Montrer que f est continue en 0.

   b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0.

3. a. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

   b. Montrer que la droite $\Delta: y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

   c. Etudier la position relative de (C) et $\Delta$.

4. Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x)$ *puis* $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)$ . Interpréter graphiquement le résultat.

5. Soit $a \in ]-\infty,0]$ .

   a. Montrer que f est dérivable en $a$ et que $f'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$

   b. Ecrire une équation de la tangente à (C) au point $A(-1;\sqrt{5})$.

   c. Déterminer le réel $x_0 \in ]-\infty,0]$ tel que la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0$ soit perpendiculaire à la droite D : $-\sqrt{3}x + y + 3 = 0$.

Bon travail