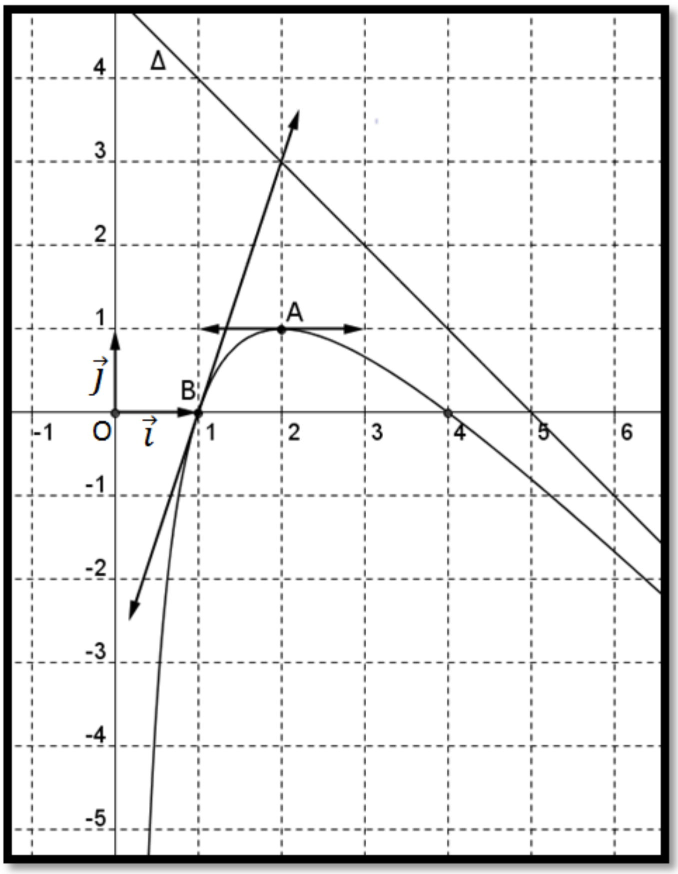
Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 1** *Mathématiques*	*Niveau : 3 ème Math*
Date : 02 /12 / 2013	*Prof : MEDDEB Tarek*	*Durée : 2 heures*

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : *(7 pts)*

A- On a représenté sur la figure ci-contre la courbe représentative Γ de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{-x^2+5x-4}{x}$.



On sait que :

- La droite Δ est une asymptote à Γ au voisinage de $+\infty$.
- Les tangentes à Γ aux points A et B son représentées sur le dessin.

1) Par lecture graphique déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$, $g'(2)$ et $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{x-1}$.
2) Déterminer une approximation affine de chacun des réels $g(1{,}02)$ et $g(2014)$.

B- Soit f la fonction définie sur $[-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)\sqrt{1-x^2} & si\ x\in[-1\,;1[\\ g(x) & si\ x\in[1\,;+\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 1.
2) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-1). Interpréter géométriquement le résultat.
3) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1. Interpréter géométriquement le résultat.
4) Montrer que l'équation : $f(x)=x$ admet une solution dans $[0\,;1]$.

Exercice n°2 : (5 pts)

A- *Questions préliminaires*.

1) Montrer que pour tous réels a et b on a :

$$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right].$$

2) En déduire que pour tous réels p et q on a :

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

B- On pose : $X=\sin\frac{\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}$ et $Y=\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5}$.

1) Montrer que $X.Y=\frac{1}{4}X$, en déduire la valeur de Y.

2) $a/$ Montrer que : $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-2Y$.

$b/$ En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation : $4t^2+2t-1=0$.

$c/$ En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice n°3 : (4 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points $A(2\ ;\ 2)$ et $B(-\sqrt{3}-1\ ;\ \sqrt{3}-1)$.

1) $a/$ Déterminer les coordonnées polaires du point A.

$b/$ Montrer que A et B sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

2) $a/$ Calculer : $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$. En déduire la mesure principale de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ et $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OB})$.

$b/$ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\cos\frac{11\pi}{12}$.

$c/$ Placer le point A et construire le point B.

Exercice n°4 : (4 pts)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Δ est la tangente en A au cercle (C) circonscrit au triangle ABC. La parallèle à (AB) menée de C coupe Δ en T.

1) Déterminer, en justifiant, la mesure principale de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AT})$, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AT})$ et $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CT})$.

2) Soit I le milieu de $[AT]$.

$a/$ Montrer que le triangle AIC est équilatéral.

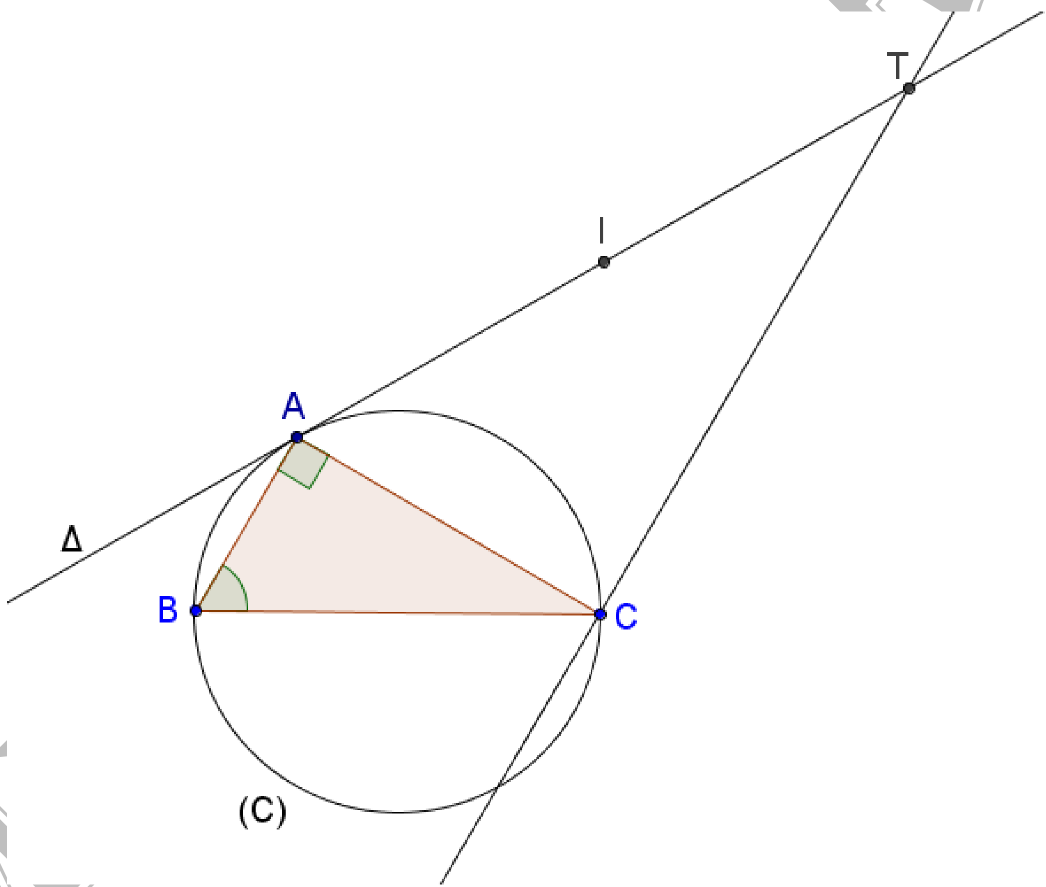
$b/$ Montrer que la droite (IC) est tangente au cercle (C).

3) Soit D un point du segment $[AB]$ distinct de A et B, la parallèle à Δ menée de D coupe $[AC]$ en E.

$a/$ Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

$b/$ On désigne par Γ le cercle circonscrit au triangle BCE.

Montrer que $D \in \Gamma$.



Bonne chance