Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 1** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 10 /12 / 2014	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

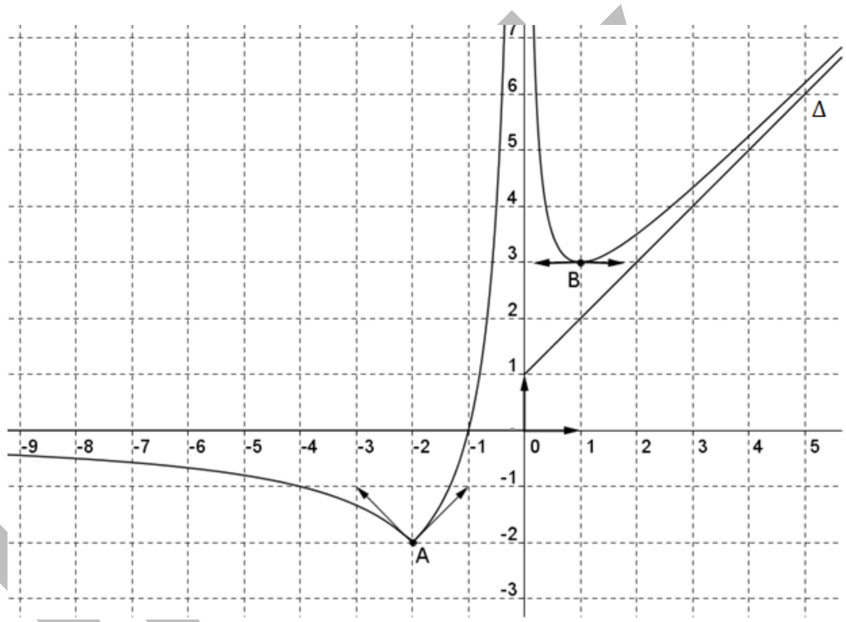
NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (9 pts)

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f continue sur $IR\setminus\{0\}$.

On sait de plus que :

- La droite Δ est une asymptote de C_f au voisinage de $+\infty$.
- La droite d'équation : $y=0$ est une asymptote de C_f au voisinage de $-\infty$
- C_f admet deux demi-tangentes au point $A(-2\,;-2)$.
- La tangente à C_f au point $B(1\,;\,3)$ est parallèle à $(O,\vec{i})$.



1) A partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer :
   $a/$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.
   $b/$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{f(x)+2}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{f(x)+2}{x+2}$.
   $c/$ Déterminer une approximation affine de $f(-2{,}001)$.
2) Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=x^2 f(x)$.
   Montrer que g est dérivable en 1 et que $g'(1)=6$.
3) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+1 & si\ x<1\\ g(x) & si\ x\geq 1\end{cases}$.

On désigne par C_h sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   $a/$ Montrer que h est continue sur IR.
   $b/$ Etudier la dérivabilité de h en 1. Interpréter géométriquement le résultat.
   $c/$ Montrer que h est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et déterminer $h'(x)$.
   $d/$ Montrer qu'il existe un point E de C_h d'abscisse dans $]-\infty\,;1[$ où la tangente T est parallèle à la droite D d'équation : $y=-\dfrac{1}{2}x$.

Exercice n°2 : *(6 pts)*

1) Montrer que, pour tous réels a et b on a :

$a/$ $\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$.

$b/$ $\sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$.

2) Montrer que, pour tout $x\in IR$, on a :

$$\cos^2 x-3\sin^2 x=2\cos 2x-1=4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

3) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\left(\cos^2 x-3\sin^2 x\right).\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

$a/$ Déterminer le domaine de définition D de f.

$b/$ Montrer que, pour tout $x\in D$, on a : $f(x)=2\sin 2x-\sqrt{3}$.

$c/$ Calculer $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, en déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

Exercice n°3 : *(5 pts)*

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs I et J et sécants en A et B.

M est un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et B et appartenant à l'arc orienté AB.

Les droites (MA) et (MB) recoupent $\mathscr{C}'$ respectivement en R et S. ***(voir figure)***

1) Montrer que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}}\right)\equiv\pi-2\left(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$.

2) Montrer que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{RS}}\right)\equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}}\right)+2\left(\widehat{\overrightarrow{RA},\overrightarrow{RS}}\right)+\pi[2\pi]$.

3) En déduire que les droites (MI) et (RS) sont perpendiculaires.

Bonne chance