Lycée M.M Dahmani
Prof:Khelifi Anis

A.S.2013/2014
Classe:$3^{ième}$Math

Devoir de synthèse en mathématique N 1

Durée:2 heures

Exercice 1 (3pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Avec justification .

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens contraire tels que $||\vec{u}|| = 2$ et $||\vec{v}|| = 1$ alors $(\vec{u} + 3\vec{v})^2 =$:
   (a) 25
   (b) 13
   (c) 1
2. $\lim_{n\to 1} -\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} =$
   (a) 1
   (b) 0
   (c) 6
3. Si ABCD un carré de coté 1 alors $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BD}$ égal à :
   (a) $-\sqrt{2}$
   (b) -1
   (c) 0
4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)= $\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$ est continue sur:
   (a) $\mathbb{R}$
   (b) $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
   (c) $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$

Exercice 2 (6pts)

I)Soit g la fonction définie par :$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$

1. (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Jusitifier la continité de g sur $[-4, +\infty[$
   (c) Calculer alors $\lim_{x\to 0} g(x)$
2. Soit f la fonction définie par:$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
   (a) Déterminer le domaine de définition D_f de f
   (b) Montrer que pour tout $x \in D_f$,on a $f(x) = g(x)$

(c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et définir la fonction prolongée F de f.

II) Soit la fonction h définie sur IR par $h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{si } x \in [-4,+\infty[\setminus\{0\} \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2+5x+4}{x+4} + m & \text{si } x \in]-\infty,-4[\end{cases}$

1. Etudier la continuité de h en 0.
2. Montrer que $\lim_{x\to(-4)^-} h(x) = m-3$
3. Pour quelle valeur de m ; h est continue en (- 4) ?
4. On prend m = 1. Déterminer le domaine de continuité de h. (Justifier).

Exercice 3 (5pts)

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+3+......+n)^2$$

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $5n(n^3+1)$ est divisible par 10
   (b) Développer $(1+n)^5$.
   (c) Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ que , $n^5 - n$ est divisible par 10

Exercice 4 (6pts)

Le plan orienté dans le sens direct.Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon $R = \frac{5}{2}$. O,A et B trois points de $\mathcal{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et C le point diamétralement opposé à B sur $\mathcal{C}$.

1. Déterminer la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ puis calculer AB
2. Soit G le point défini par: $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. La droite (CG) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en K
   (a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}})$
   (b) On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BK). Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KH}$ en fonction de $\overrightarrow{KB}$ et en déduire que:
   $$\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}KB^2$$
   (c) Montrer que $\frac{KB}{KA} = \sqrt{2}$
   (d) Calculer les distances KA et KB.
3. On désigne par I le point de rencontre de la bissectrice intérieur de secteur $[KA, KB]$ avec $[AB]$. Calculer AI
4. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que: $\frac{MB}{MA} = \sqrt{2}$
5. (Γ) et $\mathcal{C}$ se recoupent en K'.
   Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{K'A},\overrightarrow{K'B}})$