REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L' EDUCATION ET DE LA FORMATION ❄❄❄❄ DEVOIR DE SYNTHESE N : 1		LYCEE SECONDAIRE **AJIM** JERBA ⌖⌖⌖ B BRAHIM KHALED
EPREUVE : MATHEMATIQUES	COEFFICIENT : 4	NIVEAU ET SECTION : 3^e M
Premier trimestre	Date : 04 Décembre 2008	Durée : 2 heures

EXERCICE 1 (06 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

1) Questions de cours

a. (r,θ) est un couple de coordonnées polaires du point M dans un repère polaire $(O,\overrightarrow{OI})$.

Que représentent les nombres r et θ ?

b. Un point M a pour coordonnées cartésiennes $(x;\ y)$ dans $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ et pour coordonnées polaires (r,θ) dans $(O,\overrightarrow{OI})$.

Exprimer r en fonction de x et de y.

Exprimer x et y en fonction de r et de θ.

2) Application

On donne le point A de coordonnées cartésiennes $(1;\sqrt{3})$.

a. Déterminer coordonnées polaires de A. Placer le point A dans le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

b. Représenter dans le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$., l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées polaires (r,θ) vérifient :

(i) $\begin{cases} r \in]0;2] \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} r = 2 \\ \theta \in [\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}] \end{cases}$

3) Vrai ou faux

Pour chacune des quatre propositions, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.

Aucune justification n'est demandée.

a. $(1,2\pi)$ est un couple de coordonnées polaires du point I dans le repère $(O;\overrightarrow{OI})$.

b. Les points $I(1,0)$, $I'(1,\pi)$, $M(r,2\pi)$ repérés par leurs coordonnées polaires, sont alignés quelque soit le réel strictement positif r.

c. L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées polaires (r,θ) vérifient $r = 1$ et $\theta \in [0;\frac{\pi}{2}]$ est l'arc orienté $\overset{\frown}{[JI]}$.

d. Dans le repère $(O;\overrightarrow{OI})$, les points de coordonnées polaires $(2,\frac{\pi}{3})$ et $(2,\frac{5\pi}{3})$ sont symétriques par rapport à la droite (OI).

EXERCICE 2 (08 points)

Soit f la fonction définie sur IR par:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{1-x} & \text{si} \quad x<0\\ 1+x\sqrt{x} & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   c. Montrer que la droite d'équation cartésienne $y=-x-1$ est une asymptote à (C).

2. Montrer que f est continue sur IR.

3. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0. Conclure.

   b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

   c. Soit x un réel non nul. Calculer $f'(x)$.

4. Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

EXERCICE 3 (06 points)

On considère la fonction f définie sur IR par: $f(x)=x^3-3x-1$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. a. Montrer que l'équation $[E_1]: f(x)=0$ admet exactement trois racines dans IR.

   b. Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

3. On cherche les solutions de l'équation $[E_1]$ sous la forme $x=2\cos(\theta)$ (avec θ un réel).

   a. Montrer l'égalité suivante : $4\cos^3(\theta)=3\cos(\theta)+\cos(3\theta)$

   b. Démontrer que x solution de $[E_1]$ si, et seulement si, $2\cos(3\theta)=1$ $[E_2]$.

   c. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation $[E_2]$.

   d. En déduire les valeurs exactes des solutions de l'équation $[E_1]$.

Bon travail et bonne chance