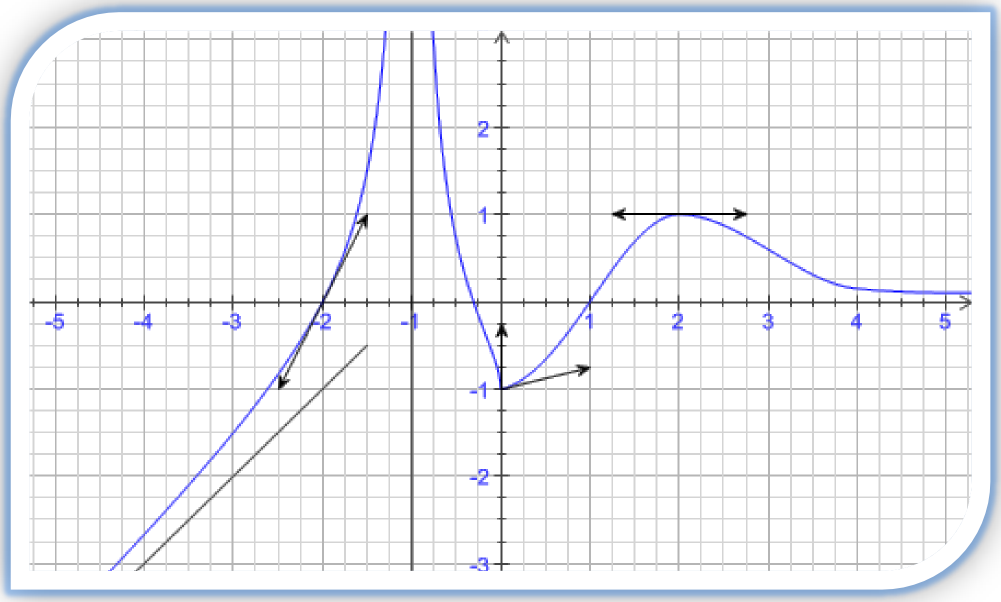
Prof	Mechmeche Imed	Devoir de synthèse N°1	Matière	Maths
Lycée	Borj-cedria		Date	06/12/2011
Niveau	3ème Maths		Durée	2 h

Exercice 1 : (5 pts)

La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ qui admet trois asymptotes, une oblique en $-\infty$ d'équation $y = x + 1$,une horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$ et une verticale d'équation $x = -1$.



1. Déterminer les limites suivantes

$\lim\limits_{-\infty} f(x) - x$; $\lim\limits_{-1} \frac{1}{f(x)}$; $\lim\limits_{+\infty} \frac{x}{f(x)}$; $\lim\limits_{0^-} \frac{f(x)+1}{x}$

2. Déterminer $f'(-2)$; $f'(2)$; $f_d{}'(0)$
3. Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -2.
4. Donner alors une approximation affine de $f(-2.01)$
5. Expliquer pourquoi f n'est pas dérivable en 0, puis donner les équations des deux demi-tangentes à C_f en 0.

Exercice 2 : (6 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{-x^3+x^2+x-1}{4(x^2-x)} & si\ x < 1 \\ \sqrt{x^2-x+1} - x & si\ x \geq 1 \end{cases}$

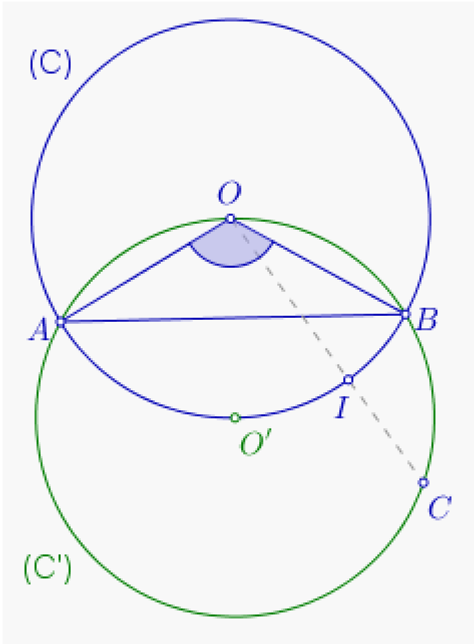
1. Montrer que pour $x < 1$ $f(x) = \frac{-x^2+1}{4x}$
2. Montrer que f est continue en 1.
3. Montrer que la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$

4. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter le résultat graphiquement.
5. C_f admet-elle une autre asymptote ? laquelle ? justifier votre réponse.
6. Montrer que f est dérivable à droite en 1 et que $f_d{}'(1) = -0.5$
7. Montrer que f est dérivable en 1.

Exercice 3 : (5 pts)

Dans la figure ci-contre (C) est le cercle de centre O passant par A et B, (C') est le cercle de centre O' passant par A, B et O.

On donne $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$, O,I et C sont alignés.



1. Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right)$ puis $\left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}}\right)$
2. Déterminer alors les ensembles suivants :
   a) $\Gamma = \left\{M \in P;\ \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\right\}$
   b) $\Gamma' = \left\{M \in P;\ \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\right\}$
3. Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}\right)$ puis $\left(\widehat{\overrightarrow{O'O}, \overrightarrow{O'A}}\right)$
4. Montrer alors que (C) et (C') ont le même rayon
5. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CI}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CA}}\right)\ \ [2\pi]$
6. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}}\right)\ \ [2\pi]$
7. Déduire de ce qui précède que I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC

Exercice 4 : (4 pts)

1. Simplifier $A = \cos\left(-x + \frac{5\pi}{2}\right) + \sin(x - 3\pi) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(2\pi - x)$
2. Montrer que $sin^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{3\pi}{8} + sin^2\frac{5\pi}{8} + sin^2\frac{7\pi}{8} = 2$
3. Soit l'inéquation (I) : $\tan\theta \geq -\sqrt{3}$.
   a) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de (I)
   b) Résoudre dans $[0\,, 2\pi[$ l'inéquation (I)
4. Résoudre dans $]-\pi\,,\ \pi]$ $|\sin\theta| < \frac{1}{2}$

Bon travail. ☺