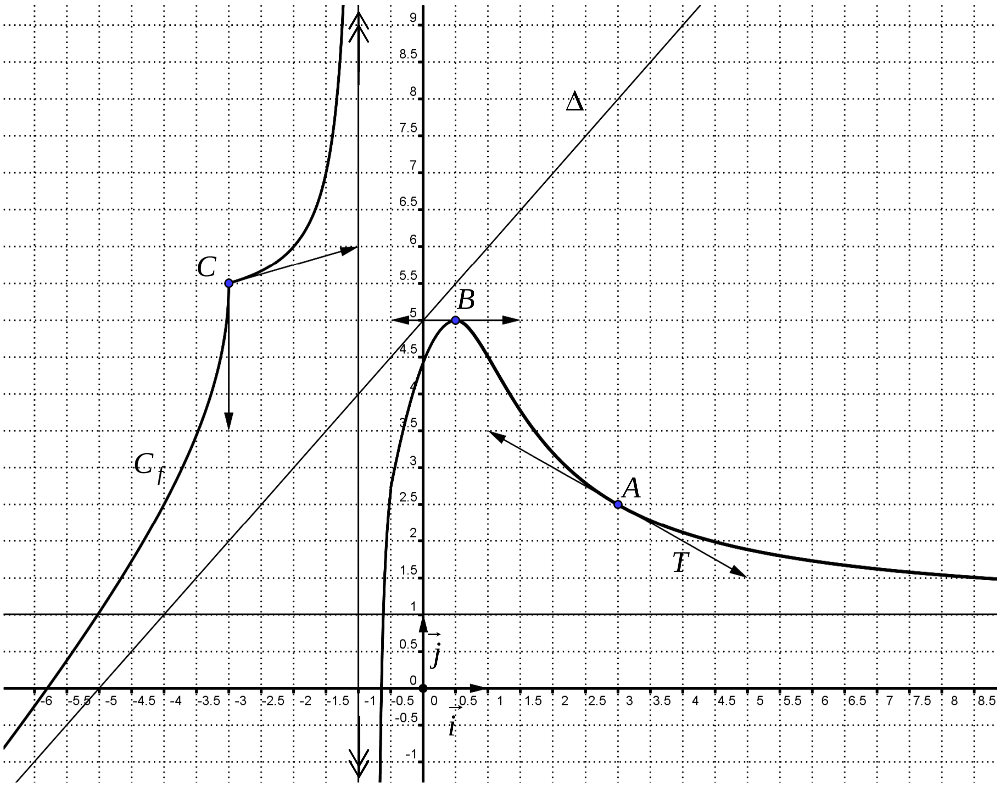
Mathématiques	*Devoir de Synthèse N° 1 :*	
3ème Maths : M1-2-3 Date : le 8 / 12 / 2010	Durée : 2heures Coefficient : 4	*Enseignants :* *Belkacem - Ghadhab - Machta*

Le sujet comporte 5 pages

Exercice N°1 : 5 *points*

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ On sait que :

- La droite Δ d'équation $y = x+5$ est asymptote à la courbe C_f en $-\infty$.
- La droite d'équation $x=-1$ est asymptote à la courbe C_f .
- La droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe C_f en .
- La droite T est la tangente à C_f au point A.
- La courbe C_f admet une tangente horizontale au point B et deux demi tangentes au point C.



À partir du graphique et des renseignements fournis :

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x-5]$. 1,25

2) a – Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'(3)$. 1

b – Donner une approximation affine du réel $f(3{,}004)$ 0,5

3) $a-$ f est elle dérivable à gauche en -3 ? Déterminer $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3}$. 0,5

$b-$ Déterminer $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{f(x)-5{,}5}{x+3}$. 0,5

4) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\sqrt{f(x)+\dfrac{3}{2}}$.

$a-$ Montrer que $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}=\dfrac{-1}{8}$. 0,75

$b-$ Ecrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 3. 0,5

Exercice N°2 : 6 *points*

I – Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $h(x)=2x-3-\dfrac{2}{x-2}$; et C_h sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) $a-$ Calculer $\lim\limits_{x\to2^-}h(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+}h(x)$. Interpréter graphiquement le résultat. 0,75

$b-$ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$. 0,5

$c-$ Montrer que C_h admet une asymptote oblique Δ d'équation cartésienne $y=2x-3$. 0,5

$d-$ Etudier la position relative de C_h par rapport à Δ. 0,5

2) Soit $a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$a-$ Montrer que h est dérivable en a et que : $h'(a)=2+\dfrac{2}{(a-2)^2}$ 0,75

$b-$ Existe-t-il des tangentes à C_h qui sont parallèles à la droite D d'équation $5x-2y+6=0$. 0,5

II – Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+x & \text{si } x\in\left]-\infty,1\right] \\ f(x)=2x-3-\dfrac{2}{x-2} & \text{si } x\in\left]1,+\infty\right[\setminus\{2\} \end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a-$ Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty,0\right[$, $f(x)=\dfrac{-3+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}-1}$ 0,75

$b-$ En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat. 0,5

2) $a-$ Montrer que f est continue en 1. 0,5

$b-$ Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat. 0,75

Exercice N°3 : 6 *points*

Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère un rectangle $ABCD$ de centre O et tels que :

$AB = 6$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$. (figure page 4).

On désigne par ζ le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$ et par $[At)$ la demi droite tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{At}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

On considère le point E de la demi droite $[At)$ tel que $AE = AC$

1) Compléter la figure. (page 4)	0,5
2) Montrer que la demi droite $[At)$ est tangente à ζ .	0,5
3) a – Montrer que $AC = 4\sqrt{3}$.	0,5
b – Montrer que OAD est équilatéral.	0,5
c – Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$.	0,5
4) Calculer $dét\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right)$ et $dét\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.	1
5) Soit M un point variable sur l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ tel que $M \neq A$ et $M \neq B$ et N le symétrique de M par rapport à O . La droite (AM) coupe (DN) en F.	
a – Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}\right)$.	0,5
b – Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.	0,5
c – Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DN}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. En déduire une mesure de $\left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FD}\right)$.	0,75
d – Déduire que F appartient à un cercle Γ , caractériser et construire Γ .	0,75

Exercice N°4 : 3 *points*

Dans le plan orienté dans le sens direct, On désigne par $\mathscr{C}$ cercle de diamètre $[AB]$ et $\mathscr{D}$ la droite qui passe par A et perpendiculaire à la droite (AB)

Cochez la case correspondante à la bonne réponse :

E ensemble des points M du plan tels que	**Nature de l'ensemble *E***					
	$[AB)\setminus\{A\}$	$[AB]\setminus\{A,B\}$	$[AB)$	$\overset{\frown}{BA}\setminus\{A,B\}$	$\zeta\setminus\{A,B\}$	$\mathscr{D}$
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=0$						
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=AM\times AB$						
$\left(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}\right)\equiv 0[2\pi]$						
$\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv \pi[2\pi]$						
$\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$						
$\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$