L. S. El Ksour	DEVOIR DE Maison N°2	Bouzouraa Chaouki
Année Scolaire 2013-2014	Mathématiques	4 Tech

Exercice N°1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère:

- Les points $A(1,1,1)$ et $B(3,2,0)$
- Le plan P passant par le point B et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
- Le plan Q d'équation : $x-y+2z+4=0$.
- La sphère S de centre A et de rayon AB.

❶ Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $2x+y-z-8=0$

❷ Déterminer une équation de la sphère S.

❸ a) Calculer la distance du point A au plan Q. En déduire que le plan Q est tangent à la sphère S.

b) Le plan P est-il tangent à la sphère S ?

❹ On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan Q, noté C, a pour coordonnées $(0,2,-1)$.

a) Prouver que les plans P et Q sont sécants.

b) Soit Δ la droite d'intersection des plans P et Q.

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est $\begin{cases} x=\alpha \\ y=12-5\alpha \\ z=4-3\alpha \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

c) Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite Δ.

d) On appelle R le plan défini par le point A et la droite Δ

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

《 Tout point du plan R est équidistant des points B et C 》

Justifier votre réponse.

Exercice N°2

Soit f la fonction définie sur IR+ par f(0) = 0 et f(x) = x (2 - ln(x)).

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.interpréter graphiquement le résultat.

2/a) Vérifier que pour tout x > 0 ; f '(x) = 1 – ln(x)

b) Dresser le tableau de variation de f.

3/ a) Résoudre l'équation f(x) = 0.

b) Tracer C_f.

Exercice N°3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans Un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité 1 cm

❶a – Dresser le tableau de variation de f

b – Ecrire l'équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0

c – Etudier la position relative de (C_f) et la tangente T

d – Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et $1<\alpha<2$

e – Construire (C_f) et T

❷ a – Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses et x = - 1 et x = 1

b – Montrer que : $0 \le f'(x) \le \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ pour tout $x \ge 1$

❸a – Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera

b – Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 , puis déterminer $(f^{-1})'(1)$

c – Construire dans le même repère (C_f)

❹ On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a – Montrer que : $U_n \ge 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b – Montrer que : $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{\pi}{4} |U_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c – En déduire que la suite (U_n) est convergente

Exercice N°4

l'éspace ξ est rapporté à un répere orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soi t $S = \{M(x,y,z) \in \xi : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre C et le rayon R.

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : x-2y+2z+2=0

a) Montrer que l'intersection de la sphère S est le plan P est un cercle ξ.

b) Déterminer les cordonnées du centre A et le rayon r du cercle ξ.

3) Soit M(a, b, -1) un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan dont une équation cartésienne est : (a-1)x +(b+2)y +z – a +2b+3=0.

a) Montrer que M appartient au plan Q.

b) Montrer que Set Q sont tangent S en M.

Exercice N°5

1).soit g la fonction définie sur $]0.+\infty[$ par $g(x)=1-x^2-\ln(x)$

a).Dresser le tableau de variation de g sur $]0.+\infty[$

b).calculer g(1) en déduire le signe de g(x) *sur* $]0.+\infty[$

2).Soit f la fonction définie sur $]0.+\infty[$par $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}-x$ et ℓ sa courbe dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

a).montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

b). Dresser le tableau de variation de f sur $]0.+\infty[$

3).a).montrer que D : y=-x est une asymptote à ℓ

b).Etudier la position de ℓ et D

c).Tracer D et ℓ .

Exercice N°6

Soit la fonction f définie sur $[1,2]$ par $f(x) = x + \frac{1}{4}(2-x^2)$.

1) a) Montrer que $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[1,2]$

c) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

d) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $\left|f(x)-\sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x-\sqrt{2}\right|$.

2) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n on a :

$$\left|U_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|U_n-\sqrt{2}\right|.$$

c) En déduire pour tout entier naturel n on a : $\left|U_n-\sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d) Déterminer alors la lim