Exercice n 1 ….6pts

Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = {u_n}^2 + 2u_n \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n ∈IN on a : $(-1) < u_n < 0$.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante sur IN .

b) Déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite .

3) On considère la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = \ln(1 + u_n)$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison q = 2 .

b) Exprimer v_n en fonction de **n** puis déduire que $u_n = \boldsymbol{e}^{(-\boldsymbol{\ln 2}).\boldsymbol{2^n}} - 1$.

c) Retrouver alors la limite de u_n .

Exercice n 2…7pts

A. Soit la fonction f définie sur IR : $f(x) = \boldsymbol{xe^{-x}}$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Montrer que $f'(x) = (\boldsymbol{1-x})\boldsymbol{e^{-x}}$
3. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe Cf de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

tel que OI=1cm et OJ=2cm.

6. Soit **A** l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe Cf et les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$. Montrer que $\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{2e-4}}{\boldsymbol{e}}$ $\boldsymbol{cm^2}$

B. soit $\boldsymbol{u_n} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{e}} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{e^2}} + \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{e^3}} + \cdots \ldots + \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{e^n}}$

1. Montrer que u_n est croissante
2. Vérifier que $u_n = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$
   a. Soit $k \geq 2$ Montrer que pour tout $x \in [k-1\,,\, k]$

   on a $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$

   b. En déduire que $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$.

Exercice n 3….7pts

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Soit un entier naturel $n \geq 1$

1. Calculer $\int_0^n e^{-t}dt$
2. En utilisant une intégration par parties

Calculer en fonction de **n** l'intégrale $u_n = \int_0^n te^{-t}dt$

3. Soit $v_n = \int_0^n t^2 e^{-t}dt$

   Montrer que $v_n = 2u_n - n^2 e^{-n}$, $n \geq 1$

Partie B :

Soit (I_n)la suite définie par $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt$

$$\text{et} \qquad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\, dt \qquad , \qquad n \in IN^*$$

1. Calculer I_0
2. Calculer I_1 par intégration par parties
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a

$$I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1}\cos t\, dt$$

4. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$ on a

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$$

5. En déduire I_2 et I_3. Puis la valeur de 'intégrale

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2t + t^2 - t^3)\sin t\, dt$$