

Exercice 1 (3 pts)

A) Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes sans justification.

1. $\ln(\sqrt[3]{e^2}) = \frac{3}{2}$.

2. La fonction $F : x \mapsto 2\sqrt{\ln x} - 2$ est la primitive sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en "e" de $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.

3. Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) h est continue à droite en 0.

b) h est dérivable à droite en 0.

B) Choisir la seule réponse exacte sans justification.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $x + 2y + 2z - 4 = 0$ et le point B de coordonnées $(3, 3, 2)$.

1. Le projeté orthogonal du point B sur le plan P est de coordonnées :

a. $(4, 0, 0)$. b. $(1, 2, 2)$. c. $(2, 1, 0)$.

2. La distance du point B au plan P est égale à :

a. $\frac{13}{3}$. b. 3. c. $\frac{17}{3}$.

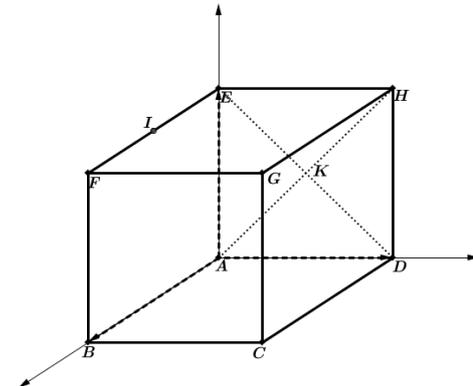
Exercice 2 (6 pts)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.

On désigne par I le milieu de $[EF]$ par K est le centre de la face $ADHE$.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct

$(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



1. a) Vérifier que le vecteur $\vec{BG} \wedge \vec{BI}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

c) Calculer l'aire \mathcal{B} du triangle BGI et le volume \mathcal{V} du tétraèdre $FBGI$.

d) Montrer que la distance h du point F au plan (BGI) est $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

2. a) Montrer que la droite (FK) est perpendiculaire au plan (BGI) .

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (FK) .

c) En déduire que la droite (FK) coupe le plan (BGI) en un point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

d) Montrer que le point L est l'orthocentre du triangle BGI .

Exercice 3 (4 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0, \sqrt{e}]$ par $f(x) = \frac{\sqrt{1-2\ln x}}{x}$ et dont la courbe \mathcal{C} est représentée sur la feuille annexe. La courbe de f admet :

- l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.
 - une tangente T au point U d'abscisse 1.
 - une demi-tangente verticale au point $I(\sqrt{e}, 0)$.
1. Déterminer graphiquement $\lim_{0^+} f$; $f(1)$; $f'(1)$ et $\lim_{x \rightarrow (\sqrt{e})^-} \frac{f(x)}{x - \sqrt{e}}$.
 2. Montrer que f réalise une bijection de $]0, \sqrt{e}]$ sur $[0, +\infty[$.
 3. a) Tracer la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère.
b) Justifier graphiquement que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et donner $(f^{-1})'_d(0)$.
c) Donner $(f^{-1})'(1)$.
 4. Montrer que la fonction F définie sur $]0, \sqrt{e}]$ par $F(x) = -\frac{1}{3}(\sqrt{1-2\ln x})^3$ est une primitive de f .

Exercice 4 (7 pts)

Soit f la fonction définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

On notera (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a) Montrer que f est dérivable sur D et que $\forall x \in D, f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.
b) Dresser le tableau de variation de f en y indiquant les limites aux bornes de D .
2. a) Montrer que f est impaire. Quel est la conséquence graphique de ce résultat ?
b) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) Vérifier que :
 - si $x > 1$ alors $\frac{x+1}{x-1} > 1$.
 - si $x < -1$ alors $\frac{x+1}{x-1} < 1$.
d) En déduire la position relative de la courbe (C) et la droite Δ .
e) Tracer la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1, +\infty[$.
a) Montrer que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur \mathbb{R} .
b) Tracer la courbe (Γ) de la réciproque g^{-1} de g .

Feuille Annexe (à rendre avec la copie)

Nom et Prénom.....

Réponses de l'exercice 1

A)

Enoncé		Vrai ou Faux
1.		
2.		
3.	a)	
	b)	

B)

Enoncé	Réponse choisie
1.	
2.	

