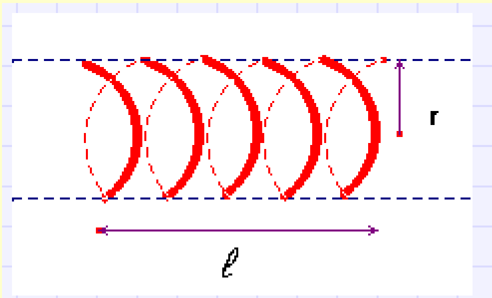
Circuit RL

4ème Mats-SC-Tech-SI

I-La bobine

- Une bobine est constituée d'un enroulement de fil conducteur, recouvert d'un vernis isolant, sur un cylindre de rayon **r**.

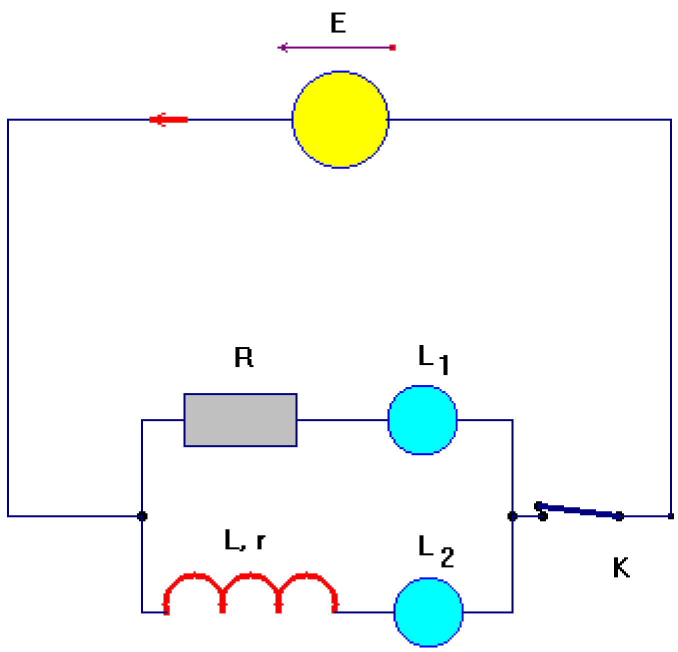
- On désigne par **ℓ** la longueur de l'enroulement et par **r** le rayon d'une spire :



II- Influence d'une bobine dans un circuit.)

- Expérience : Retard à l'établissement du courant.

- Montage 1 :



- Observations : La lampe L_2 s'allume avec un retard sur la lampe L_1.

- Il se produit un retard à l'établissement du courant dans la portion de circuit qui comporte la bobine.

- Une bobine s'oppose transitoirement à l'établissement du courant dans un circuit.

- En régime permanent, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de résistance **r**

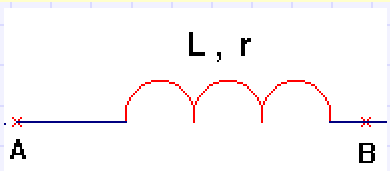
III- Caractéristiques d'une bobine.

1)- L'inductance d'une bobine.

- Une bobine est un dipôle, de bornes **A** et **B**, caractérisé par son inductance **L** exprimée en henry (symbole H).
- On utilise souvent le millihenry (mH).
- L'inductance **L** de la bobine est une constante positive qui ne dépend que des caractéristiques géométriques de la bobine

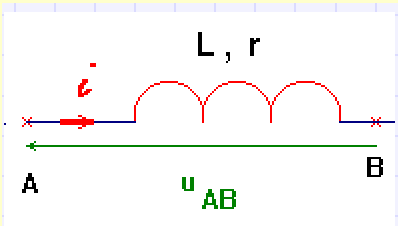
2)- Résistance d'une bobine.

- En régime permanent, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de résistance **r**.
- Une bobine est aussi caractérisée par sa résistance **r** qui s'exprime en ohm (W).



4)- Expression de la tension aux bornes d'une bobine.

- Une bobine est caractérisée par son inductance **L** et sa résistance **r**.
- La bobine étant orientée de **A** vers **B**, la tension u_{AB} aux bornes de la bobine est donnée par la relation :



Tension aux bornes d'une bobine : u_{AB} tension en volt (V)

$$u_{AB} = L\,.\,\frac{di}{dt} + r\,.\,i \quad \begin{cases} I \text{ intensité en ampère (A)} \\ r \text{ résistance en ohm } (\Omega) \\ L \text{ inductance en henry (H)} \end{cases}$$

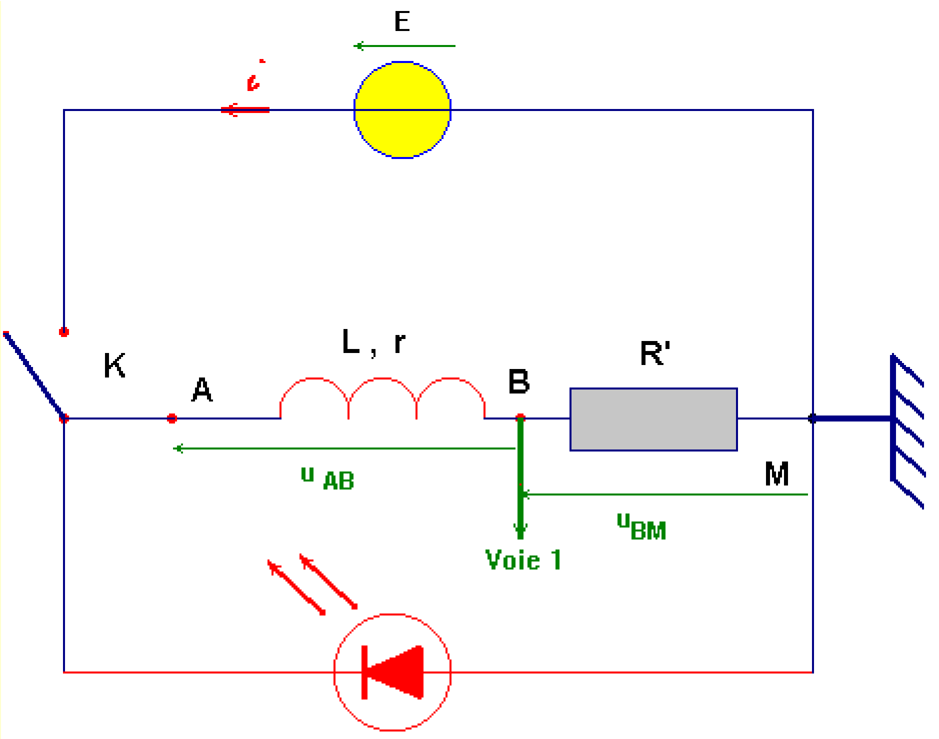
Remarque : cas d'une bobine idéale (**r** = 0)

$$u_{AB} = L\,.\,\frac{di}{dt}$$

IV- Établissement du courant dans une bobine :

1)- Étude expérimentale : Réponse à un échelon de tension.

- Montage 2 : réponse d'une bobine à un échelon de tension.



- Il comprend :

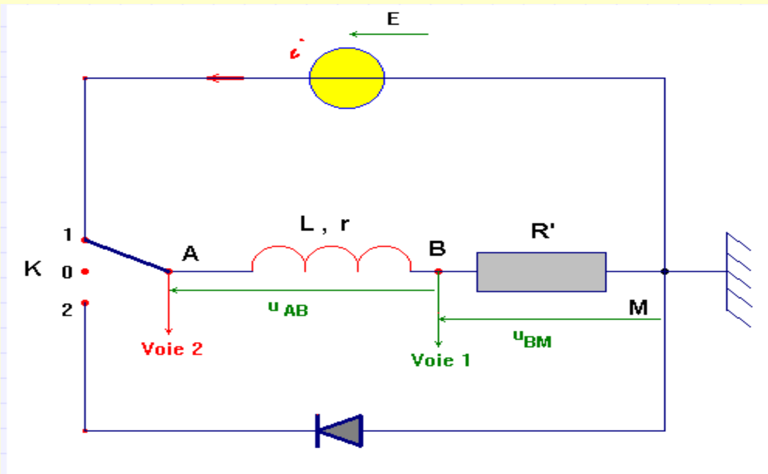
- Un générateur idéal de tension **E** = 3,2 V ;

- un conducteur ohmique de résistance **R'**= 18 Ω,

- une bobine d'inductance **L** et de résistance **r** = 8,8 Ω et

- un interrupteur **K**.

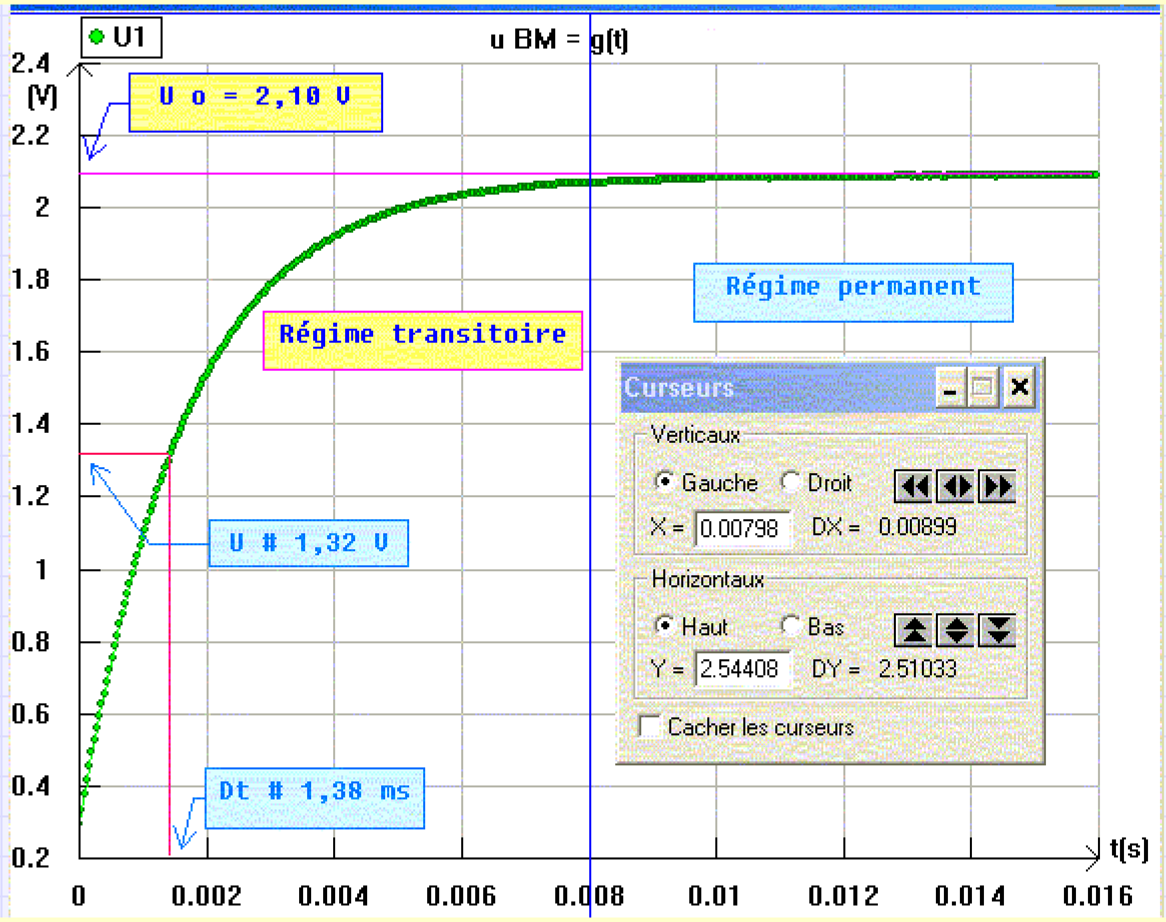
- Au temps **t** = 0 s, on ferme l'interrupteur en le basculant sur la position 1



- Si l'on considère qu'au temps **t**, le courant circule dans le sens positif choisi,

$$u_{BM} = R'.i \Rightarrow i = \frac{1}{R'} . u_{BM}$$

On visualise les variations de l'intensité en fonction du temps, ceci à une constante près.



- Observations : On pose : **R = r + R'**

- La tension aux bornes du dipôle (**R**, **L**) passe brutalement de la valeur à la valeur **E** = 3,2 V.

- L'intensité traversant le circuit est nulle juste après la fermeture de l'interrupteur **K**,

- puis elle augmente progressivement jusqu'à atteindre une valeur maximale et reste constante.

- Le courant met environ la durée **Δt** ≈ 8,0 ms pour s'établir.

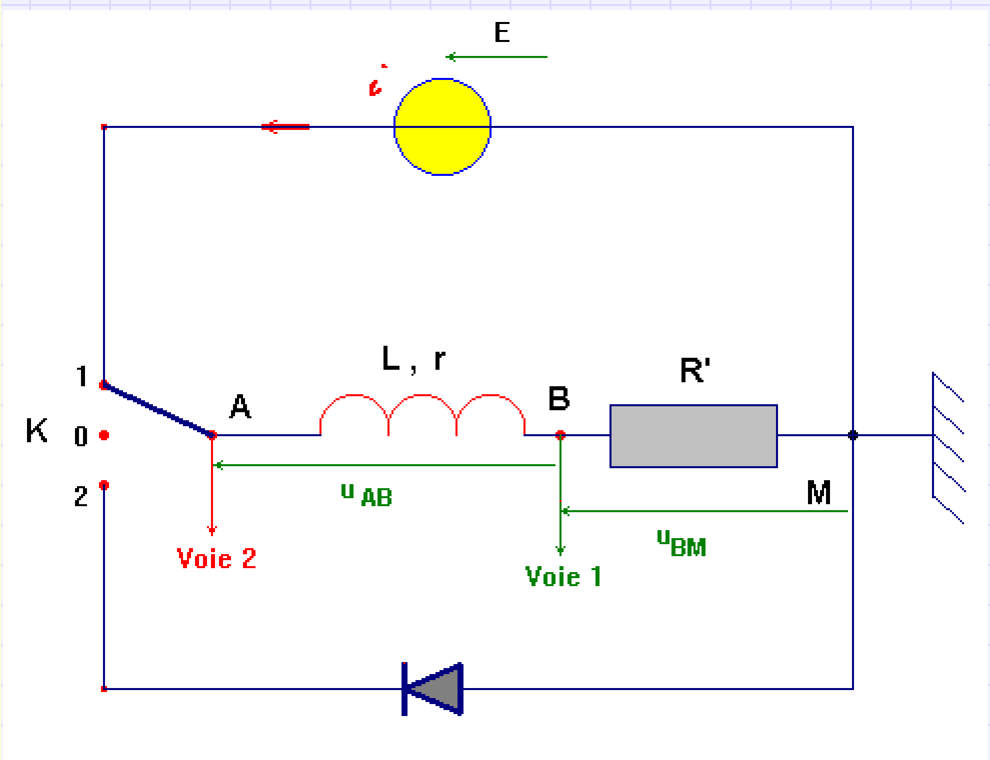
- Premier temps : **t**

- **t** € [t_0, t_0 + **Δt**] : régime transitoire, établissement du courant dans la bobine.

- **t** € [t_0 + **Δt**, t_1] : régime permanent, le courant est établi.

- La bobine s'oppose à l'établissement du courant dans le circuit.

2)- Équation différentielle vérifiée par l'intensité **i** :



- On ferme l'interrupteur.

- On oriente le circuit et on étudie le dipôle (**R**, **L**).

- La loi d'additivité des tensions dans le circuit série permet d'écrire :

$$\mathbf{E = u_{AB} + u_{BM}}$$

$$\mathbf{E = \left(L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i\right) + R' \cdot i}$$

- En ordonnant, on peut écrire :

$$\mathbf{E = L \cdot \frac{di}{dt} + (r + R') \cdot i}$$

En posant $\mathbf{R = r + R'}$

$$\mathbf{E = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i} \quad (1)$$

- On reconnaît une équation différentielle du premier ordre avec deuxième membre qui admet une solution du type :

- $\mathbf{i(t) = A \cdot e^{k.t} + B}$ où **A**, **B** et **k** sont des constantes.

3)- Détermination des constantes.

- On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales et des paramètres du circuit.

- Première étape : on reporte l'expression de la solution dans l'équation (1).

$$E = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i \quad (1) \quad ; \quad i(t) = A \cdot e^{k \cdot t} + B \text{ et } \frac{di}{dt} = A \cdot k \cdot e^{k \cdot t}$$

$$E = L \cdot A \cdot k \cdot e^{k \cdot t} + R \cdot \left(A \cdot e^{k \cdot t} + B\right)$$

$$E = L \cdot A \cdot k \cdot e^{k \cdot t} + R \cdot A \cdot e^{k \cdot t} + R \cdot B$$

$$E = \left(L \cdot A \cdot k + R \cdot A\right) \cdot e^{k \cdot t} + R \cdot B \quad (2)$$

- La relation (2) est vérifiée à chaque instant.

- Or **E** = c[te], **R . B** = c[te] et **t** et par conséquence $\mathbf{e}^{k.t}$ varient au cours du temps.

- Il faut nécessairement que :

$$\begin{cases} (L \,.\, k + R) \,.\, A = 0 \\ E = R \,.\, B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{R}{L} \\ E = R \,.\, B \end{cases}$$

La solution **A** = 0 n'a pas de signification physique

Conditions initiales : au temps **t** = 0 s, l'intensité dans le circuit est nulle : **i** (0) = 0.

- On déduit de ceci que :

$$i(0) = A \,.\, e^{k \,.\, 0} + B = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B = -\frac{E}{R}$$

- Relation donnant l'intensité traversant le dipôle (**R**, **L**) soumis à un échelon de tension **E** :

$$i(t) = A \cdot e^{k \cdot t} + B$$

$$i(t) = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{E}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

- Expression de la tension aux bornes de la bobine en fonction du temps.

- On peut en déduire l'expression de la tension aux bornes de la bobine :

$$u_{AB} = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i$$

$$u_{AB} = L \cdot \frac{E}{R} \cdot \left(\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) + r \cdot \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right)$$

$$u_{AB} = E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + r \cdot \frac{E}{R} - r \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$u_{AB} = E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \left(1 - \frac{r}{R} \right) + r \cdot \frac{E}{R}$$

- étude de la relation :

$$u_{AB} = E \cdot \left(1 - \frac{r}{R} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + r \cdot \frac{E}{R}$$

- Quelle est la valeur de la tension aux bornes de la bobine au temps **t** = 0 s ?

- **u_{AB} = E.**

- Quelle est la valeur de l'intensité dans le circuit lorsque **t** tend vers l'infini ?

$$i(\infty) = I = \frac{E}{R}$$

V- Rupture du courant dans un circuit.

1)- Expériences.

- Montage 1 : visualisation du phénomène à l'oscilloscope.

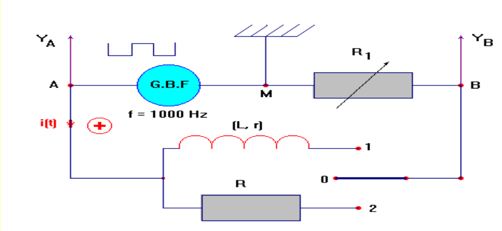
- Il comprend :

- Un **G.B.F** qui délivre une tension carrée **f** = 1000 Hz

- Un conducteur ohmique de résistance R_1 réglable de 0 à 500 Ω.

- Une bobine d'inductance **L** = 20 mH et de résistance **r** = 20 Ω.

- Un conducteur ohmique de résistance **R** = 18 Ω.



- Que visualise-t-on à la **voie A** de l'oscilloscope ?

- On visualise les variations de la tension aux bornes du **G.B.F**, c'est-à-dire la tension u_{AM}.

- Que visualise-t-on à la **voie B** de l'oscilloscope ?

- On visualise les variations de la tension aux bornes du conducteur ohmique de résistance R_1, c'est-à-dire la tension u_{BM}.

- Si l'on considère qu'au temps **t**, le courant circule dans le sens positif choisi

$$u_{BM} = R_1 . i \Rightarrow i = \frac{1}{R_1} . u_{BM}$$

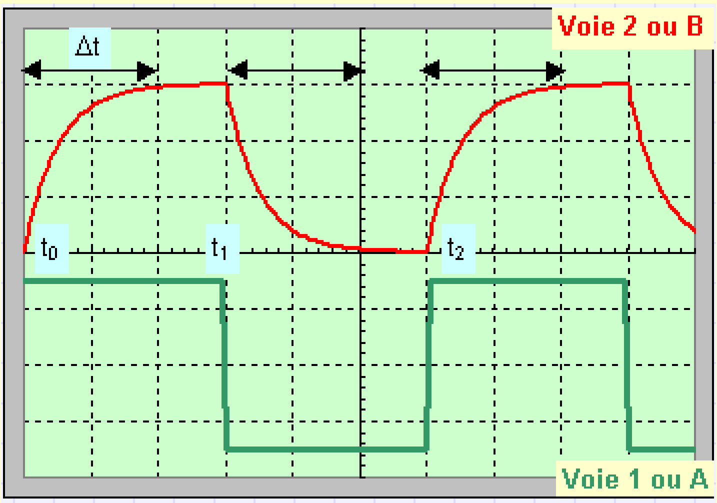
-On visualise les variations de l'intensité en fonction du temps, ceci à une constante près.

- Observations :

- La courbe qui apparaît à la voie **B**, ne suit pas exactement les variations de celle qui apparaît à la voie **A**.

- Il y a un retard à l'établissement et à l'annulation du courant dans le circuit

2)- Interprétation.



- Premier temps :

- **t** € [**t**$_0$, **t**$_0$ + **Δt**] : régime transitoire, établissement du courant dans la bobine.

- **t** € [**t**$_0$ + **Δt**, **t**$_1$] : régime permanent, le courant est établi.

- La bobine s'oppose à l'établissement du courant dans le circuit.

- Deuxième temps :

- **t** € [$\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_1}$ + **Δt**] : régime transitoire, établissement du courant dans la bobine.

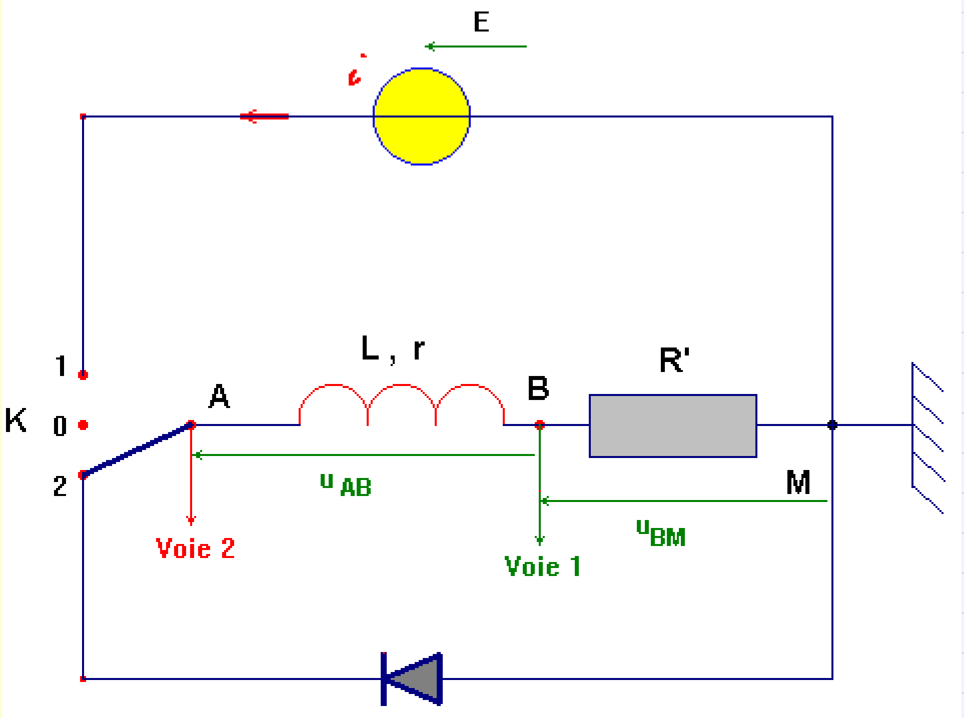
- **t** € [$\mathbf{t_1}$ + **Δt**, $\mathbf{t_2}$] : régime permanent, le courant est établi.

- La bobine s'oppose à l'annulation du courant dans le circuit.

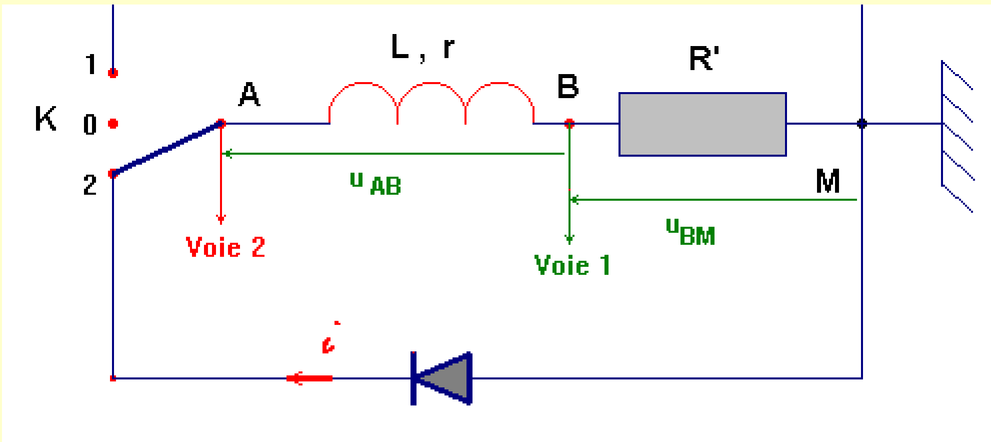
- La bobine s'oppose à la diminution de l'intensité du courant électrique dans le circuit.

3)- Équation différentielle vérifiée par l'intensité **i** lors de l'ouverture du circuit.

- L'interrupteur étant sur la position 1, on le bascule sur la position 2.



- On oriente la partie du circuit qui nous intéresse



- D'après la loi d'additivité des tensions dans un circuit série, on a l'égalité :

$$u_{AB} + u_{BM} = 0$$

$$E = \left(L.\frac{di}{dt} + r.i\right) + R'.i = 0$$

$$L.\frac{di}{dt} + (r + R').i = 0$$

En posant $R = r + R'$

$$L.\frac{di}{dt} + R.i = 0 \quad (1)$$

- On reconnaît une équation différentielle du premier ordre en **i** sans deuxième membre.
- Elle admet une solution du type : **i (t)** = **A . e**$^{k.t}$ + **B** où **A**, **B** et **k** sont des constantes.
- On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales et des paramètres du circuit.
- Il découle de la relation que :

$$0 = L\cdot\frac{di}{dt} + R\cdot i \quad (1) \quad ; \quad i(t) = A\cdot e^{k\cdot t} + B \text{ et } \frac{di}{dt} = A\cdot k\cdot e^{k\cdot t}$$

$$0 = L\cdot A\cdot k\cdot e^{k\cdot t} + R\cdot\left(A\cdot e^{k\cdot t} + B\right)$$

$$0 = L\cdot A\cdot k\cdot e^{k\cdot t} + R\cdot A\cdot e^{k\cdot t} + R\cdot B$$

$$0 = (L\cdot A\cdot k + R\cdot A)\cdot e^{k\cdot t} + R\cdot B \quad (2)$$

Il faut nécessairement que :

$$\begin{cases} (L.k + R).A = 0 \\ 0 = R.B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{R}{L} \\ B = 0 \end{cases}$$

La solution $A = 0$ n'a pas de signification physique

- Condition initiale : au temps **t** = 0 s, L'interrupteur est en position 1.
- Le courant est établi est l'intensité dans le circuit est donnée par la relation :

$$i(0) = \frac{E}{R}$$

- On déduit de ceci que :

$$i(0) = A \cdot e^{k \cdot 0} + B = \frac{E}{R} \Rightarrow A + B = \frac{E}{R} \Rightarrow A = \frac{E}{R}$$

L'intensité du courant électrique **i** traversant le dipôle (**R**, **L**) a pour expression :

$$i(t) = A \cdot e^{k \cdot t} + B$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + 0$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

- Remarque :

- Lorsque **t** tend vers l'infini, alors **i** (**t**) tend vers zéro.

- Le courant électrique ne s'annule pas brusquement à l'ouverture du circuit.

- La bobine s'oppose à la diminution de l'intensité du courant électrique dans le circuit.

- De façon générale, une bobine s'oppose aux variations de l'intensité du courant électrique dans un circuit.

- Expression de la tension aux bornes de la bobine en fonction du temps.

- On peut en déduire l'expression de la tension aux bornes de la bobine :

$$u_{AB} = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i$$

$$u_{AB} = -L \cdot \frac{E}{R} \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + r \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$u_{AB} = -E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + r \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$u_{AB} = E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \left(\frac{r}{R} - 1 \right)$$

- En utilisant le fait que : **R** = **r** + **R'** :

$$u_{AB} = E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \left(\frac{r}{R} - 1\right)$$

$$u_{AB} = E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \left(\frac{R - R'}{R} - 1\right)$$

$$u_{AB} = E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \left(1 - \frac{R'}{R} - 1\right)$$

$$u_{AB} = -E \cdot \frac{R'}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

VI- Constante de temps du circuit :

1)- Expression de la constante de temps **τ**.

- La durée de l'établissement ou de l'annulation du courant dans un circuit (**R, L**) dépend de la résistance **R** et de l'inductance **L** du circuit.

- On appelle constante de temps du circuit (**R**, **L**), la valeur :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- **τ** constante de temps : seconde s.

- **R** résistance du circuit ohm W.

- **L** inductance du circuit : henry H.

- Lors de l'établissement du courant, l'expression de l'intensité du courant électrique dans le circuit est donnée par l'expression :

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

- Lors de l'annulation du courant électrique dans le circuit :

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2)- Analyse dimensionnelle :

$$U = R \cdot I \Rightarrow [R] = \frac{(V)}{(A)} \quad (1)$$

- D'autre part de la relation $u_{AB} = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i$, on tire :

$$(V) = [L] \cdot \frac{(A)}{(s)} \Rightarrow [L] = \frac{(V) \cdot (s)}{(A)} \quad (2)$$

- En combinant (1) et (2) :

$$\frac{[L]}{[R]} = \frac{(V) \cdot (s)}{(A)} \cdot \frac{(A)}{(V)} \quad \Rightarrow \frac{[L]}{[R]} = (s)$$

Le rapport $\frac{L}{R}$ a la dimension d'un temps.

Il s'exprime en seconde dans le **S.I.**

3)- Détermination de la constante de temps **τ**.

- Pour déterminer graphiquement la valeur de **τ**, on trace la tangente à l'origine à la courbe **i** = **f** (**t**) et l'asymptote horizontale à cette courbe.

- L'abscisse du point d'intersection de ces deux droites donne la valeur de la constante de temps **τ**.

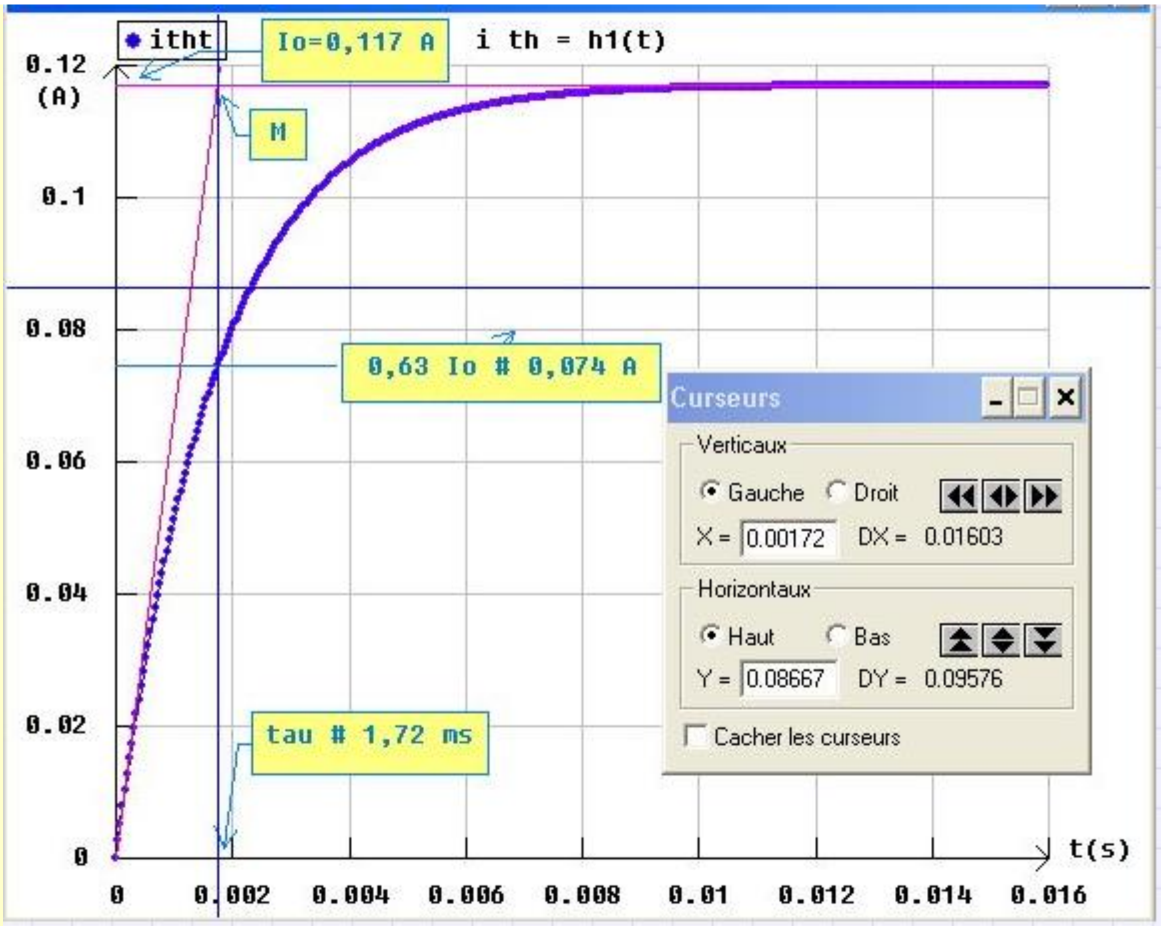
$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{L} \cdot \frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{i} \right) + \mathbf{R'} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{L} \cdot \frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}} + (\mathbf{r} + \mathbf{R'}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{L} \cdot \frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}$$

Au temps $\mathbf{t} = 0, \mathbf{i} = 0$ et $\mathbf{E} = \mathbf{L} \cdot \left[\frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}} \right]_{t=0}$

$$\left[\frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}} \right]_{t=0} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R} \cdot \tau}$$

En posant : $\mathbf{I}_0 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}$

$$\left[\frac{\mathbf{di}}{\mathbf{dt}} \right]_{t=0} = \frac{\mathbf{I}_0}{\tau}$$



- D'après la relation :

$$\mathbf{i}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}\left(1 - \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{t}}{\tau}}\right)$$

- Pour **t** = **τ** :

$$\mathbf{i}(\tau) \approx \frac{63}{100} \cdot \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}$$

- Pour **t** = 5 **τ :**

$$\mathbf{i}(5\tau) = \frac{99}{100} \cdot \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}$$

VII- Énergie emmagasinée dans une bobine :

Expression de l'énergie emmagasinée dans une bobine.

- Une bobine d'inductance **L,** traversée par un courant d'intensité **i,** emmagasine de l'énergie. C'est de l'énergie magnétique que l'on note $\mathbf{E_m}$ ou $\mathbf{W_L}$.

$$E_m = W_L = \frac{1}{2} L i^2$$