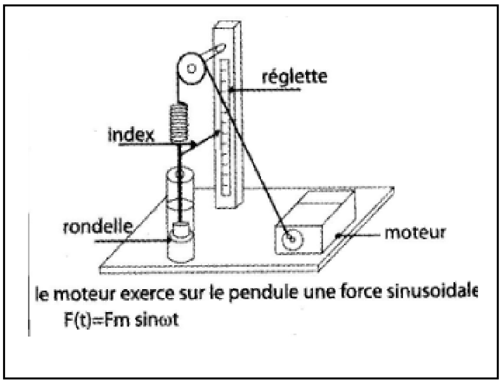
Rappel : Oscillation libre non Amorti

- *L'élongation x est sinusoïdalepériodique.*
- *L'élongation x subie des oscillations sans diminution d'amplitude.*
- *Les caractéristiques d'oscillation.*
  - *Fréquence propre :* $N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$.
  - *Période propre :* $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$.
  - *Pulsation propre :* $W_o = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

Les oscillations forcées

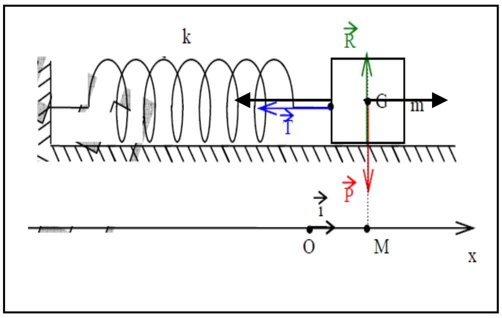


- *Le corps est soumis a une force excitatrice ou force moteur* ***F***.
- ***F*** *est sinusoïdalepériodique en fonction du temps.*

1- Equation différentielle

- *En applique la* ***RFD*** : $\Sigma \vec{F}_{app} = m\vec{a}$

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{f}+\vec{F}+\vec{R} = m\vec{a}$$



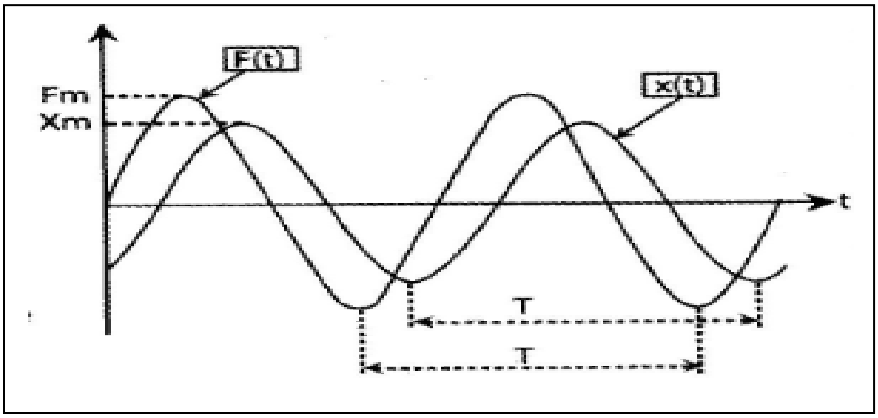
- *Par projection sur* ***(x x')***

$$-Kx - hv + F = m\,a \quad \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + K\,x = F$$

- *L'équation différentielle admet comme solution*

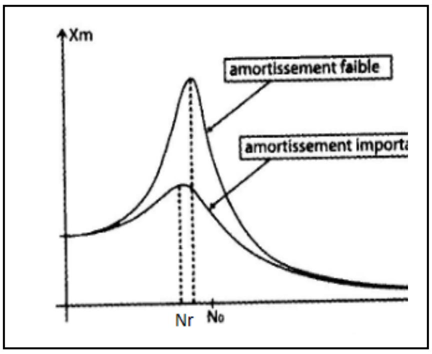
$x = x_m\sin(wt+\varepsilon_x)$ *et* $F(t) = F_m\sin(wt+\varepsilon_F)$

- *On donne le deux courbes* $x = f(t)$ *et* $F = f(t)$



2- Influence de l'excitateur N sur l'amplitude

- *On remarque expérimentalement que l'amplitude* X_m *varie en fonction de la fréquence* **N** *de l'excitateur.*
- X_m *augmente, atteint un maximum puis diminue*
- *Lorsque* **N =N**$_r$, X_m *et maximale, c'est la résonance d'élongation*



$N_r^2 = N_o^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$: $N_r < N_0$.

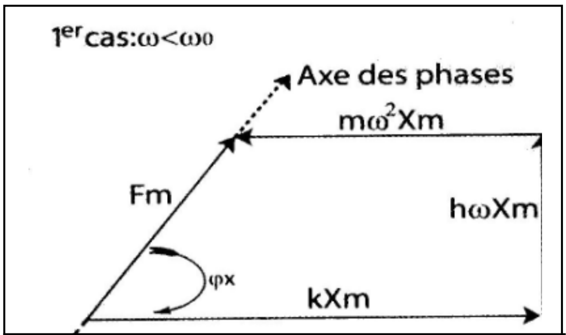
3- Détermination de X_m et ε_x par la méthode de Fresnel

1^{er} cas : $w^2 < \frac{K}{m} = w_0^2 N < N_0$

$(\varepsilon_F - \varepsilon_x) \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$ $tg(\varepsilon_F - \varepsilon_x) > 0$.

$tg(\varepsilon_F - \varepsilon_x) = \frac{h\,w}{K - m\,w^2}$

F est en avance de phase par rapport à X.

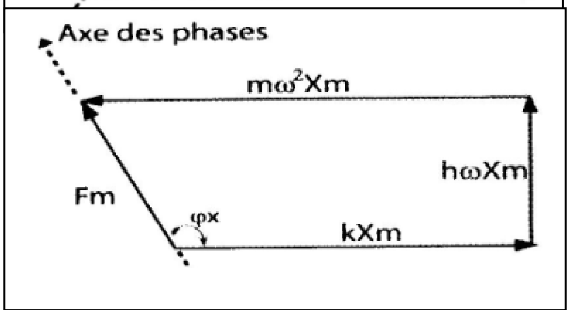


$2^{ème}$ cas : $w^2 > \frac{K}{m} \Rightarrow w > w_o \Rightarrow N > N_0$

$(\varepsilon_F - \varepsilon_x) \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$ $tg(\varepsilon_F - \varepsilon_x) < 0$.

$tg\ (\varepsilon_F - \varepsilon_x) = \frac{h\,w}{K - m\,w^2}$

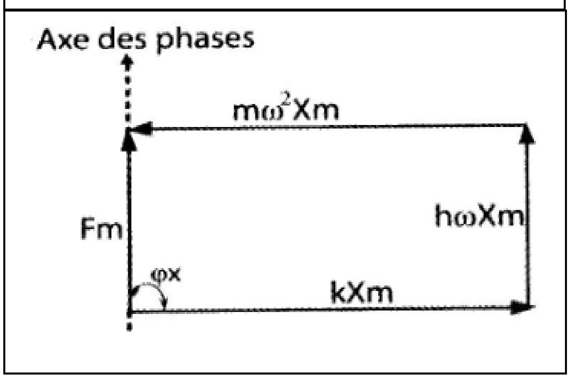
F est en avance de phase par rapport à X.



$3^{ème}$ cas : $m\,w^2 = K \Rightarrow w = w_0 \Rightarrow N = N_0$

$\varepsilon_F - \varepsilon_x = \frac{\pi}{2}$ et $\varepsilon_F > \varepsilon_x$: $X_m = \frac{Fm}{h\,w}$.

F est en quadrature avance par rapport à x.



D'après Pythagore

$(h\,X_m\,w)^2 + [\,K\,X_m - m\,w^2 X_m]^2 = Fm^2$

$$X_m = \frac{Fm}{\sqrt{h^2 w^2 + (k - m\,w^2)^2}}$$

Remarque

$$V_m = X_m w = \frac{Fm}{\sqrt{h^2 + (\frac{k}{w} - m\,w)^2}}$$

$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \frac{\pi}{2}$.

4- Détermination de N_r à la résonance d'élongation

- *À la résonance d'élongation* X_m *est maximal.*
- *Pour que* X_m *est maximal il faut que* **f(w)** *soit minimal*
- *avec :* $f(w) = h^2 w^2 + (k - mw^2)^2$

L'étude de f(w)

$f'(w) = 2w\,[h^2 - 2m(K - mw^2)]$

$f'(w) = 0 \quad w_r \Longrightarrow W_r^2 = W_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \quad N_r^2 = N_o^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2} \Longrightarrow$

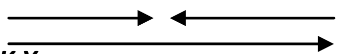
w	O		w_r ∞
f'(w)	-		+
f(w)	↘		↗
X_m	↗		↘

5- L'amplitude X_m et le déphasage si h = 0

- *L'équation différentielle devient :* $m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = F$
- *La construction de Fresnel*

<u>1^{er} cas</u> : $m w^2 < K \Rightarrow w < w_0 \Rightarrow N < N_0$

$\varepsilon_F = \varepsilon_x \Rightarrow$ **F et x sont en phase** Fm $\quad m w^2 X_m$

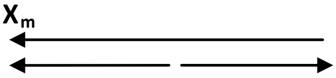


$X_m = \frac{Fm}{(K - mw^2)}$ $\qquad$ $K X_m$

<u>$2^{ème}$ cas</u> : $m w > K \Rightarrow w > w_0 \Rightarrow N > N_0$

$\varepsilon_F = \varepsilon_x + \pi \Rightarrow$ **F et x sont en opposition de phase**

$X_m = \frac{Fm}{(mw^2 - K)}$ $\qquad$ $m w^2 X_m$



Fm $\qquad$ $K X_m$

à **la resonance** : $X_m \longrightarrow +\infty$

$\Rightarrow K - mw^2 \; 0 \qquad \longrightarrow$

$\Rightarrow w w_o \qquad \longrightarrow$

$\Rightarrow \qquad N \longrightarrow N_0$

$\Rightarrow$ **Rupture du ressort**

6- Résonance de vitesse

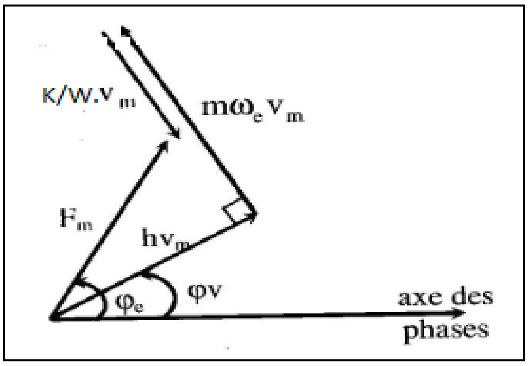
a- L'équation différentielle

$$m\frac{dv}{dt} + hv + K\int v\,dt = f$$

$V = V_m \sin(wt + \varepsilon_v)$

$F = F_m \sin(wt + \varepsilon_F)$

b- La construction de Fresnel

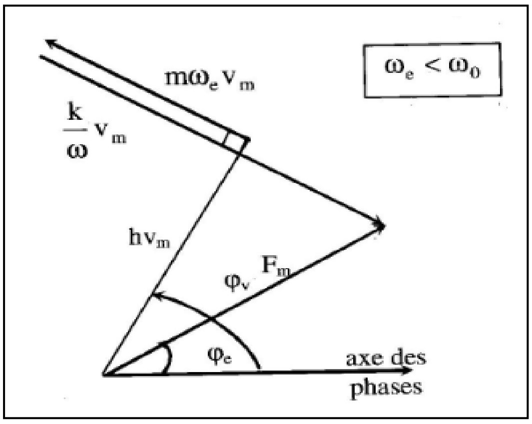


1^er cas : $\frac{k}{w} < m\,w \Longrightarrow w_0 < w \Longrightarrow N > N_0$

$(\varepsilon_F - \varepsilon_v) \in [0 ; \frac{\pi}{2}[\Longrightarrow tg(\varepsilon_F - \varepsilon_v) > 0$

$$tg(\varepsilon_F - \varepsilon_v) = \frac{m\,w - \frac{k}{w}}{h}$$

F est en avance de phase par rapport à v.



2^ème cas : $\frac{K}{w} > m\,w \Longrightarrow w_0 > w \Longrightarrow N < N_0$

$(\varepsilon_F - \varepsilon_v) \in [-\frac{\pi}{2} ; 0[\Longrightarrow tg(\varepsilon_F - \varepsilon_v) < 0$

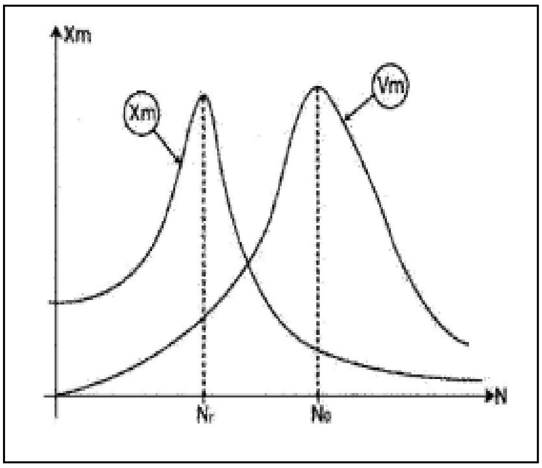
$$tg(\varepsilon_F - \varepsilon_v) = \frac{m\,w - \frac{k}{w}}{h}$$

F est retard de phase par rapport à v.

3^ème cas : $w = w_o \Longrightarrow N = N_o$

$\varepsilon_F = \varepsilon_v \Longrightarrow$ F et v sont en phase.

$V_m = \frac{Fm}{h}$



- Pour les trois cas, et d'après Pythagore

$V_m = \frac{Fm}{\sqrt{h^2 + (\frac{k}{m} - mw)^2}}$: V_m varie avec N

- On donne la courbe qui donne $V_m = f(w)$.
- A la résonance de vitesse l'amplitude V_m est maximale

$\Longrightarrow$ à la résonance $V_m = \frac{Fm}{h}$ et $N = N_0$

Remarque : $X_m = \frac{Vm}{w} = \frac{Fm}{\sqrt{h^2\,w^2 + (\frac{k}{m} - m\,w)^2}}$. $\varepsilon_x = \varepsilon_v - \frac{\pi}{2}$.