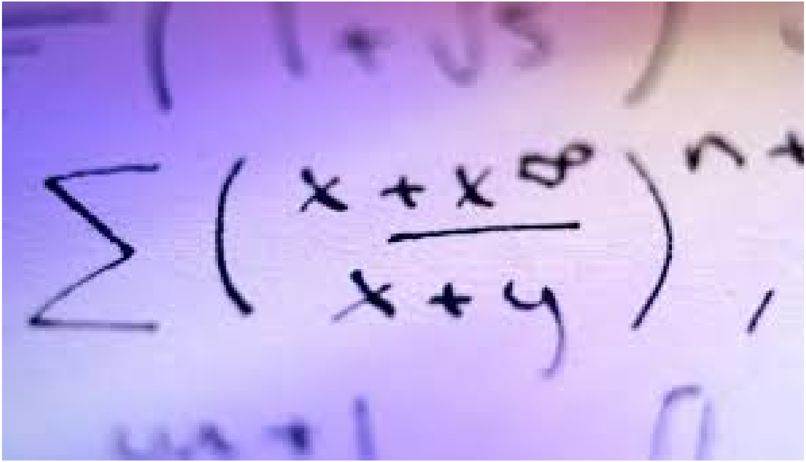
LYCÉE DE MATEUR

Devoir de contrôle N:1
avec correction intéractive

Hamda Abbes

22 novembre 2016



(a) $\lim_{x\to 0} \xi(x) = 1$.

Vrai Faux

(b) La fonction $\xi(x)$ n'est pas continue en 0 .

Vrai Faux

Aide d'utilisation

4. Soit f et g … $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2}$ et

$g(x) = x^2 \Big($ … $= 0$.

Vrai Faux

Fin Score: 0 out of 6 Réponses

Exercice 1 (3 points)

Partie A :Vrai ou Faux

Début

1. Soit (u_n) une suite réelle.

(a) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ alors $u_n = 1$ à partir d'un certain rang.

○ Vrai ○ Faux

(b) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et (u_n) converge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

○ Vrai ○ Faux

2. f est une fonction définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, g est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Si g décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

○ Vrai ○ Faux

3. On a $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $E(1) = 1$, on considère la fonction ξ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\xi(x) = E\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ alors :

(a) $\lim_{x\to 0} \xi(x) = 1$.

○ Vrai ○ Faux

(b) La fonction $\xi(x)$ n'est pas continue en 0 .

○ Vrai ○ Faux

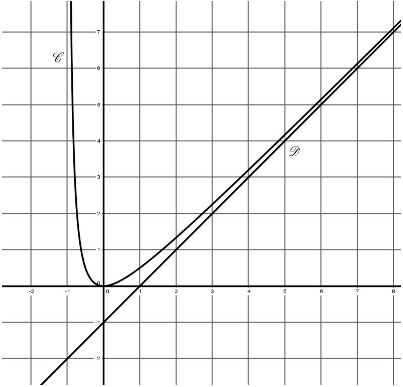
4. Soit f et g deux fonctions définies par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2}$ et $g(x) = x^2\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1\right)$ alors $\lim_{x\to 0} g\circ f(x) = 0$.

○ Vrai ○ Faux

Fin | Votre Score : | Réponses

Partie B :lécture graphique

Le graphique ci-contre $\mathscr{C}$ est la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur$]-1,+\infty[$. $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$, une asymptote oblique $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$ et une tangente horizontale en 0.



Début :

1. Déterminer l'équation de l'asymptote $\mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ d'équation

2. Par lecture graphique donner $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x - f(x)}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - f(x)} =$$

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) =$$

Fin Votre Score : Réponses

Réponses :

Exercice 2 (6 points)

Partie A

Début On considère dans $\mathbb{C}$ l'application $P(z) = \dfrac{1-i}{2}z^2 - \sqrt{3}z + 1 + i$.

1.

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

(b) On note A et B les points d'affixes z_A et z_B, solutions de l'équation $P(z) = 0$,où $Im(z_A) > Im(z_B)$. Donner l'écriture algébrique de z_A.

2.

(a) Calculer $\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)$.

(b) En déduire l'écriture exponentielle de z_A.

3. Donner alors une valeur exacte de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

Fin Votre Score : Réponses

Réponses :

Partie B

Début Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application $\mathscr{F}$ définie par :

$$\mathscr{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{3}}{6}(1-i)\,z^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1+i) \end{array}$$

1. Montrer que $\mathscr{F}(z) = z \iff P(z) = 0$. Donner alors les points fixes de $\mathscr{F}$.

2. Soit Δ la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A.
On note $\mathbb{E} = \left\{M(z') / z' = \mathscr{F}(z) \text{ où } z \text{ est l'affixe d'un point de la droite } \Delta\right\}$.

(a) Montrer que $Re(z) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

(b) Nous avons tracé une partie de l'ensemble $\mathbb{E}$, Expliquer comment, à l'aide de cet ensemble, construire uniquement au compas les points A et B.

Fin Votre Score : Réponses

Réponses :

Exercice 3 (5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n une fonction définie sur $[0,1]$ par : $f_n(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - x^n$.

Début

1.

(a) Étudier la variation de la fonction f_n sur $[0,1]$.

Fin Votre Score : Réponses

Réponses :

(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $-\frac{1}{2} \leq f_n(x) \leq 1$.

(c) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in [0,1]$ telle que $f_n(\alpha_n) = 0$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$.

3. En déduire que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et qu'elle converge vers une limite ℓ.

4. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \alpha_n \leq M < 1$.

(a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$.

(b) Montrer qu'il y a une contradiction et en déduire ℓ la limite de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4 (6 points)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = -1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

Début

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n)n'est ni arithmétique et ni géométrique.

$u_2 =$ $\boxed{}$

2. On définit la suite (V_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$V_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

(a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et exprimer V_n en fonction de n.

$V_n =$ $\boxed{}$

(b) En déduire la limite de V_n. $\boxed{}$

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ $\boxed{}$

3. On définit la suite (W_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$W_n = \dfrac{u_n}{V_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : W_{n+1} = W_n + 2$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

(a) Calculer S_n.

(b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

Fin Votre Score : Réponses

Réponses : $\boxed{}$

Solutions to Quizzes

Solution to Quiz :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie por tout $n \neq 0$,
par :$u_n = 1 + \frac{1}{n}$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$,
mais $u_n \neq 1$ alors 1.(a)Faux

Solution to Quiz :

Soit la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :
$u_n = \frac{1}{n+1}$.
Alors la suite (u_n) convergente et $u_n > 0$,
mais $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Alors 1.(b)Faux

Solution to Quiz :

g d'écroissente, Soit $a > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{a\} \Longrightarrow \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \leqslant 0.$

$$\Longrightarrow \frac{\frac{f(x)}{x} - \frac{f(a)}{a}}{x-a} \leqslant 0.$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x} \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(a)}{ax} \leqslant 0.$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(a)}{ax} \quad \text{car} x \geqslant 0.$$

Or $0 \leqslant \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ car f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(a)}{a}.$$

$$\Longrightarrow \left|f(x)-f(a)\right| \leqslant \frac{f(a)}{a}|x-a|.$$

Comme $\lim\limits_{x\to a} |x-a| = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Alors 2.Vrai

Solution to Quiz :

Pour $x \neq 0$ on a $\dfrac{\sin x}{x} < 1$,

Et puisque $\lim_{x\to 0} \xi(x) = 1$. Alors $E\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \xi(x) = 0.$

Alors 3.(a)Faux ∎

Solution to Quiz :

Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Alors $\lim_{x \to 0^+} \xi(x) = \lim_{x \to 0^-} \xi(x) = \lim_{x \to 0} \xi(x) = 0$.

Donc La fonction $\xi(x)$ est continue en 0.

Alors 3.(b)Faux

Solution to Quiz :

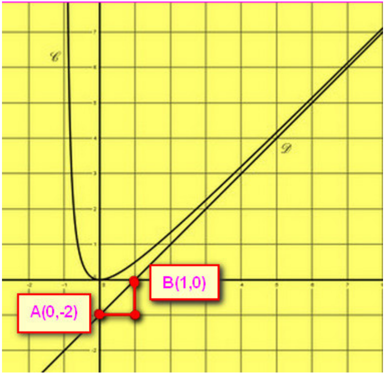
On a $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} g\circ f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x)$.

$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} g\circ f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Alors 4. Faux

Solution to Quiz :



Par lécture graphique, soit $A(0,-1)$ et $B(1,0)$.

La pante da la droite (AB) est : $\dfrac{0-(-1)}{1-0} = 1$, la droit (AB) coup l'axe des y en -1.

Alor :l'équation de l'asymptote $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$ est $y = x - 1$.

Solution to Quiz :

$\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$.

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -1$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x - f(x)} = 1}$.

Solution to Quiz :

Si $x \to +\infty, \dfrac{1}{x} \to 0$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) = f'(0)$

Or graphiquement $f'(0) = 0$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

Solution to Quiz :

Résolution de l'équation $P(z)=0$

On a $\Delta=(-\sqrt{3})^2-4\dfrac{1-i}{2}(1+i)=-1$

Alors $z_1=\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}$ et $z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$

Donc $\boxed{S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i},\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right\}}$.

■

Solution to Quiz :

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{3}-i}{1-i}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Puisque $Im(z_A) > Im(z_B)$ alors $z_A = z_2$

Alors $z_A = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$

Donc $\boxed{z_A = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}$.

Solution to Quiz :

$$\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right) \equiv \arg\left(\sqrt{3}+i\right) - \arg(1-i)\ [2\pi].$$

Alors $\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right) \equiv \frac{\pi}{6} - \left(\frac{-\pi}{4}\right)\ [2\pi]$

Donc $\boxed{\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]}$.

Solution to Quiz :

$$\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right) = \arg z_A$$

$$\text{Et} |z_A| = \left|\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right| = \frac{\left|\sqrt{3}+i\right|}{|1-i|}$$

$$\text{Alors } |z_A| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Donc } \boxed{z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}.$$

■

Solution to Quiz :

On a $z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

et puisque $z_A = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

Alors $\boxed{\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

et $\boxed{\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$.

■

Solution to Quiz :

$$\mathscr{F}(z) = z \iff \frac{\sqrt{3}}{6}(1-i)z^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}(1+i) = z.$$

$$\iff \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6}(1-i)z^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}(1+i) = z \times \sqrt{3}.$$

$$\iff \frac{1-i}{2}z^2 + 1 + i = \sqrt{3}z.$$

$$\iff \frac{1-i}{2}z^2 - \sqrt{3}z + 1 + i = 0.$$

$$\iff P(z) = 0.$$

Donc les points fixes par $\mathscr{F}$ sont $\boxed{A \text{ et } B}$.

■

Solution to Quiz :

Soit $M \in \mathbb{E}$ alors $M \in \Delta$

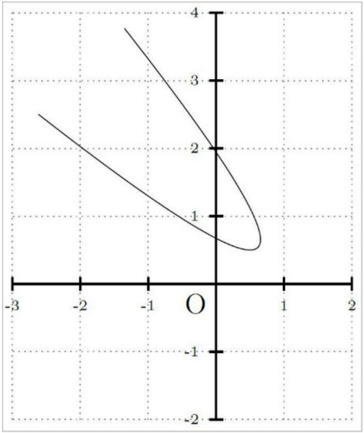
$\Longrightarrow x_M = x_A$.

$\Longrightarrow Re(z) = Re(z_A)$.

$$\Longrightarrow \boxed{Re(z) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}}.$$

■

Solution to Quiz : $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ alors $A \in \mathscr{C}_{(O,\sqrt{2})}$.
Or $A \in \mathbb{E}$ Alors $A \in \mathbb{E} \cap \mathscr{C}_{(O,\sqrt{2})}$.



Solution to Quiz :

$f_n'(x) = -\frac{1}{2} - nx^{n-1} < 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Alors la fonction f est strictement d'écroissante sur $[0,1]$.

Solution to Quiz :

$$u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0.$$

Alors $u_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} \times (-1)$.

Donc $\boxed{u_2 = \dfrac{3}{4}}$.

Solution to Quiz :

$V_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$.

Alors $V_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1}$.Car $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

Alors $V_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)$.

Alors $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$.

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = 1$.

Et $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier n .

■

Solution to Quiz :

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et

$-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Alors $\boxed{\lim_{n \to +\infty} V_n = 0}$.

Solution to Quiz :

Si on pose $\lim_{n\to+\infty} u_n = \varrho$.

Et $V_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$.

Alors ϱ vérifier $0 = \varrho - \frac{1}{2}\varrho$

Alors $\varrho = 0$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.