L. Regueb	**Mathématiques**	Classe : $4^{ème}$M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Contrôle №1	Le:10/11/2016 D:2h

Exercice1(5pts)

On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - e^{i\theta}z + i\sin(\theta)\cos(\theta) = 0$

et le polynôme : $P(z) = z^4 - e^{i\theta}z^2 + i\sin(\theta)\cos(\theta)$; où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right[$.

1) Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes : i ; $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$.

2)a) Vérifier que $z_1 = \cos(\theta)$ est une solution de l'équation (E) .

b) En déduire l'autre solution z_2 de (E) .

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice2(7pts)

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$par $f(z) = i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$.

Les points M , A et B sont d'affixes respectives z , $2i$ et i .

1)a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ on a : $|f(z)| = \frac{AM}{BM}$.

b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$ on a : $\arg(f(z)) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2) Déterminer les deux ensembles suivants :

$E = \{M(z) \in P / |f(z)| = 1\}$ et $F = \{M(z) \in P / f(z) \in i\mathbb{R}\}$

3) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ on a : $|f(z) - i| = \frac{1}{|z-i|}$ *et* $arg(f(z) - i) \equiv -azg(z - i)[2\pi]$

4)a) Montrer que si M est un point du cercle (Γ) de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$ alors le point M' d'affixe f(z) appartient à un cercle que l'on précisera .

b) On prend un point M de (Γ) , construire alors en justifiant le point M' à partir du point M .

Exercice3(8pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1-x}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-2} + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal .

1) Déterminer les limites de f aux bornes se son domaine de définition et préciser les asymptotes

Verticales et horizontales .

2)a) Montrer que la courbe (C_f) admet la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote oblique

au voisinage de $+\infty$.

b) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x) - x}$ et $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(f \circ f)(x)}{f(x)}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$.

3) Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ et $h = g \circ f$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de h .

b) Montrer que h est prolongeable par continuité en 2 .