

➤ **Exercice 1:**

Le graphique ci-dessous (C) est la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- ✓ La droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$
- ✓ La droite $\Delta' : y = -1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$
- ✓ La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à (C)



1. A l'aide du graphique et des renseignements fournis, déterminer

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(x)+1}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)-x}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ f)(x)}{f(x)}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $h = g \circ f$

- a. Déterminer l'ensemble de définition de h .
- b. Montrer que h est prolongeable par continuité en 2

Exercice N°2

Soit n un entier naturel non nul, f_n la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f_n(x) = x + n - n \tan(x)$

1/ a) étudier les variations de f_n sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

b) en déduire que l'équation, $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

c) vérifier que $\alpha_n \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que : $\tan(\alpha_n) = 1 + \frac{\alpha_n}{n}$

2/on définit la suite (α_n) pour $n \in \mathbb{N}^*$

a) montrer que pour tout $x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f_{n+1}(\alpha_n) < f_n(\alpha_n)$

b) déduire alors que (α_n) est décroissante

c) prouver que (α_n) est convergente et calculer sa limite

➤ **Exercice N°3**

Soit (O, \vec{u}, \vec{v}) un repère orthonormé et pour tous $Z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on définit l'application ;

$$f(z) = i \left(\frac{z - 2i}{z - i} \right) \quad ; \quad \text{soit les points } M, A \text{ et } B \text{ d'affixes } Z, 2i \text{ et } i$$

1/ a) montrer que $\forall Z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ on a : $|f(z)| = \frac{AM}{BM}$

b) montrer que $\forall Z \in \mathbb{C} \setminus \{2i, i\}$ on a : $\arg(f(z)) \equiv \widehat{(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})} + \frac{\pi}{2} [2\pi]$

2/ déterminer les deux ensembles suivants

$$E = \{ M(Z) \text{ tels que } |f(z)| = 1 \} \quad \text{et} \quad F = \{ M(Z) \text{ tels que } f(Z) \text{ est imaginaire pur} \}$$

3/ montrer que $\forall Z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ on a : $|f(z) - i| = \frac{1}{|z-i|}$ et $\arg(f(z) - i) \equiv -\arg(Z - i) [2\pi]$

4/ a) montrer que si $M \in \mathcal{C}(B, \frac{1}{2})$ alors le point M' d'affixe $f(Z)$ appartient à un cercle que l'on précisera

b) construire alors le point M' à partir du point M (avec justification)

Exercice

On considère dans \mathbb{C} l'équation

$$(E_\theta) : z^2 - 2i \sin(2\theta)z - 1 = 0$$

où θ est un réel donné.

1- Vérifier que $e^{2i\theta}$ est une solution de (E_θ) puis déduire la deuxième solution (On pourra l'écrire sous forme exponentielle).

2- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E'_\theta) : z^4 - 2i \sin(2\theta)z^2 - 1 = 0$$

où θ est un réel donné. (On donnera les solutions sous forme exponentielle)

3- Montrer que les images dans le plan complexe des solutions de (E'_θ) sont les sommets d'un rectangle.

Bon travail