

❖ **Exercice n°1 :** (3points)

- Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte.
- L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
- Aucune justification n'est demandée.

1.) Soit a un nombre complexe, l'ensemble des points $M(z)$ tels que $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 2016$ est :

- (a) Une droite (b) un cercle (c) le vide

2.) Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation : $mz^2 + 2m^2z - 1 = 0$ où m est nombre complexe de module 2

On a alors :

- (a) $|z_1 \cdot z_2| = 2$ (b) $|z_1 + z_2| = 2$ (c) $|z_1 + z_2| = 4$

3.) Le nombre complexe $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$ est une racine sixième de $8e^{i\frac{\pi}{6}}$

- (a) vrai (b) faux

4.) Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f(3) = 0$ et $f'(3) = 2$ alors $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(\sqrt{x+6})}{x-3}$ est égal à :

- (a) $\frac{1}{3}$ (b) 2 (c) 0

❖ **Exercice n°2 :** (6points)

Soit U la suite réelle définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1$

1.) a. Montrer que la suite U est croissante.

b. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}; U_n \geq 2$.

2.) a. Montrer que si $U_n \geq n$ alors $U_n(U_n - 1) \geq n$

b. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}; U_n \geq n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3.) Soit la suite (S_n) définie par : $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$

a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{U_n} = \frac{1}{U_n - 1} - \frac{1}{U_{n+1} - 1}$

b. En déduire que, $S_n = 1 - \frac{1}{U_n - 1}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

4.) On pose : $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (U_k - 1)^2$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = U_n - 2$. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

❖ **Exercice n°3 :** (6points)

Dans le plan complexe \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où a est un nombre complexe donné différent de 1 .

Soit l'application $f : \mathcal{P} \setminus \{B\} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ telle que : } z' = \frac{z-a}{z-1}$$

1.) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation :

$$(E) : z^2 - 2z + a = 0$$

2.) a. On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$ avec $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Résoudre l'équation (E).

b. Mettre sous forme exponentielle chacune des solutions de (E).

3.) Dans cette question on suppose que $a = -1$

Soit M un point de $\mathcal{P} \setminus \{B\}$ d'affixe z et $M' = f(M)$ le point d'affixe z' .

a. Montrer que : $(\vec{u}, \widehat{BM}) + (\vec{u}, \widehat{BM'}) \equiv 0[2\pi]$

b. En déduire que la demi droite $[BA)$ est la bissectrice de l'angle $(\widehat{BM}, \widehat{BM'})$

c. Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$

d. En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.

❖ **Exercice n°4:** (4points)

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f_n(x) = \tan x - x - n$$

1. Etudier les variations de f_n sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. a. Montrer que l'équation d'inconnue x , $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b. Donner, suivant les valeurs de x , le signe de $f_n(x)$.

c. Calculer $f_{n+1}(\alpha_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

d. En déduire que la suite (α_n) est strictement croissante.

e. Prouver que (α_n) est convergente.

f. Déterminer la limite de $\tan(\alpha_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

g. Déterminer alors la limite de (α_n) .