Abbes

Lycée Mateur Hamda Abbes

N: 1

Devoir de Controle

2 h

4ème Maths 2015 - 2016

Le sujet comporte 3 pages. La page annexe n:3 est à rendre avec la copie.

5 points

Exercice N:1

1. Montrer que chacune des équations : $\sin(\cos x) = x$ et $\cos(\sin x) = x$ admet une unique racine dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. On considère x_1 et x_2 sont respectivement les racines de la première et de la seconde équation
   (a) Montrer que $x_1 < \cos x_1$ et $x_2 > \cos x_2$.
   (b) En déduire que $x_1 < x_2$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x) > 0$.
3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \sin x . E(\dfrac{1}{x})$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\varphi\left(\dfrac{f(\frac{1}{x})}{x} \right) + \sin(\dfrac{x+1}{x}) \right] = 1$.

8 points

Exercice N:2

On définie la suite (u_n) par : $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} u_n$.

1. On considère les suites (a_n) et (b_n) , telles que $a_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n$ et $b_n = 2^n u_n$.
   (a) Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique et calculer a_n en fonction de n .
   (b) Montrer que la suite (b_n) est une suite arithmétique et calculer b_n en fonction de n .
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n-1}{2^n}$.
2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $n \leqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2^n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. On considère $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $S_n = 2 \sum\limits_{k=0}^{n} a_k - \left(2 + \dfrac{3n+2}{2^n}\right)$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{S_n}$.

7 points

Exercice N:3

Soit le nombre complexe $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$

1. On considère les nombres complaxes $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.
   (a) Calculer $\alpha\beta$ .Et montrer que $1 + \alpha + \beta = 0$.
   (b) En déduire que α et β solutions de l'équation (E) : $X^2 + X - 1 = 0$.
   (c) Calculer α en fonction de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E), et déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ,\overrightarrow{u}\ ,\overrightarrow{v})$ .On désigne par A_0 , A_1 , A_2 , A_3 et A_4 les points d'affixes respectives 1 , ω , ω^2, ω^3 et ω^4 .
   (a) Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) et l'axe $(O\ ,\ \overrightarrow{u})$.
   Montrer que $Aff\left(\overrightarrow{OH}\right) = \cos\dfrac{2\pi}{5}$.
   (b) Le cercle Γ de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ passant par le point $B\,(i)$ recoupe $(O\ ,\ \overrightarrow{u})$ en deux points M et N où $M \in [O, \overrightarrow{u})$ **(voir annexe)**. Montrer que $Aff\left(\overrightarrow{OM}\right) = \alpha$ et $Aff\left(\overrightarrow{ON}\right) = \beta$.
4. En déduire une construction du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont un des sommets est le point A_0 d'affixe 1.**(Placer les points Sur l'annexe)**

Annexe (à rendre avec la copie)

Nom et prénom :...