LYCEE AIN DRAHEM	DEVOIR DE CONTROLE N°1	CL :4M
PROF : B-NEJIB	30-10-2013	DUREE :2h

EXERCICE N°1(3pts)

Répondre par **VRAI** ou **FAUX** en justifiant la réponse :

1) Soit (u_n) et (v_n) deux suites tel que $v_n = (-1)^n u_n$; si (u_n) converge alors (v_n) converge.
2) Si $\frac{\pi}{3}$ est un argument d'un nombre complexe z alors un argument de iz^3 est $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
3) Soit f et g deux fonction définies sur $\mathbb{R}$. Si f est paire et g est impaire alors fog est impaire.

EXERCICE N°2(5pts)

On considère la suite (u_n) définioe par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 - \sqrt{{u_n}^2 + 9} \end{cases}$

1) a- montrer que : $0 \leq u_n \leq 4$

   b-montrer que (u_n) est croissante

   c-en déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit $v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} u_k$; montrer que : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
3) Soit $w_n = 2\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} + n^2 v_n$
   a- Montrer que : $u_{k+1} \geq \frac{3-u_k}{2}$ pour tout $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$
   b- Déduire que : $w_n \geq 3n + 3$ puis calculer : $\lim_{n\to+\infty} w_n$

EXRCICE N°3(7pts)

Le plan complexe est muni d'un R.O.N.D $(O; \vec{u}; \vec{v})$ soit A et B les points d'affixes ; $z_A = i$et $z_B = -i$; (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et $M'' = S_{(O;\vec{u})}(M)$

Soit f l'application du plan qui à tout point $M(z); z \neq 0$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{z^2+1}{z}$

1) a- déterminer $f(A)$ et $f(B)$

   b- montrer que : **$z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z' \in i\mathbb{R}$.**

   c-en déduire l'image de la droite (AB) par f .

2) a- montrer que si $z = e^{i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$ alors $z' = 2\cos\theta$ .en déduire que si M décrit le cercle (C) alors M' décrit un segment que l'on précisera.

b-résoudre l'équation : $z' = 2\cos\theta$ et mettre les solutions sous forme exponentielle.

3) a-vérifier que pour tout nombre complexe no nul z on a : $z' - z = \frac{1}{z}$.

b- en déduire que : $MM' = \frac{1}{OM}$ et que les vecteurs ; $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont colinéaires de même sens.

c- Montrer que si $M \in (C)$ alors : $OMM'M''$ est un losange.

d- Construire M ; M' et M'' dans le cas ou $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

EXERCICE N°4(5pts)

Le plan est muni d'un repère O.N.D $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On a représenter la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que (C) admet :

- Une asymptote $D: y = 3 - x$ au voisinage de $+\infty$
- Une branche parabolique de direction $(O;\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$

1) En utilisant le graphique :
   a- Déterminer ; $f(0)$; $f(-1)$et $f([2;+\infty[\,)$
   b- Déterminer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + x - 3)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{fof(x)}{f(x)}$.
   c- Dresser le tableau de variation de f
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-1;0[$
3) Soit $g(x) = \frac{1}{x^2}$ et $h(x) = gof(x)$.
   a- Déterminer le domaine de définition de h
   b- Calculer $\lim_{x\to\alpha} h(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.

BON TRAVAIL