devoir de contrôle N1

SAIDANI MOEZ

bac maths

2014/2015

LYCEE DE MATEUR

EXERCICE N°1(7 points)

Le plan est rapporté à un repère direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

On désigne par A et B les points d'affixes 1 et 2 .

Soit θ un réel de l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. On considère l'équation $(E) : iz^2 - 2(i - \cos\theta)z - 2\cos\theta = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2. Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma = \left\{ M(z) \in P / \arg(\frac{z-2}{z}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \right\}$.
3. Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + ie^{-i\theta}$.
   (a) Ecrire sous la forme exponentielle $z_1$et z_2.
   (b) Montrer que $\frac{z_1 - 2}{z_1} \in i\mathbb{R}_-$ et $\frac{z_2 - 2}{z_2} \in i\mathbb{R}_-$.
   (c) Déduire que lorsque θ décrit $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, chacun des points M_1 et M_2 décrit l'ensemble Γ.
   (d) lorsque $M_1 \neq M_2$,on désigne par G le centre de gravité du triangle AM_1M_2.
   Déterminer l'ensemble des points G lorsque θ varie $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
   (e) i. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}}\right) \equiv -2\theta\ [2\pi]$
   ii. Déduire les valeurs de θ pour lesquelles le triangle AM_1M_2 est équilatéral.

EXERCICE N°2 (6 points)

Le plan est rapporté à un repère direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$(I)
   (b) Placer dans le plan P les points images A, B, C, D et E des solutions de l'équation (I)
2. On considère le polynôme $Q(z) = (1 - z)^4 + (1 - z)^3 + (1 - z)^2 + (1 - z) + 1$
   (a) Vérifier que : $zQ(z) = 1 - (1 - z)^5$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(z) = 0$
   (c) Déduire que $Q(z) = (z + e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1)(z + e^{i\frac{4\pi}{5}} - 1)(z + e^{-i\frac{4\pi}{5}} - 1)(z + e^{-i\frac{2\pi}{5}} - 1)$
3. Montrer que $AB.AC.AD.AE = 5$

EXERCICE N°3 (7 points)

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n + x^{n-1}...... + x^2 + x - 1; \, n \geq 1$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$.

(b) Donner une valeur approchée de α_2 et α_3 à 10^{-2} prés.

2. Pour tout $n \geq 1$ comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

    (a) Montrer que pour tout , $n \geq 1$; $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$ puis déduire que (α_n) est décroissante.

    (b) Montrer que $\forall n \geq 1; 0 < \alpha_n \leq \frac{3}{4}$ puis calculer $\lim(\alpha_n)^{n+1}$.

    (c) Montrer que ,$\forall x \neq 1; f_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$puis déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*; (\alpha_n)^{n+1} = 2\alpha_n - 1$.

    (d) Montrer que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite.

3. Pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = \alpha_n - \dfrac{1}{2}$.

    (a) Montrer que ,$\forall n \geq 2, 0 < u_n \leq \dfrac{1}{4}$.

    (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*(1 + 2u_n)^{n+1} = 2^{n+2}u_n$.

    (c) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{4})^{n+1}$ puis calculer $\lim u_n$.