



Le devoir comporte 3 pages Numérotées de 1/3 à 3/3

La page 3/3 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (voir annexe)

Exercice 2

Dans la figure de l'annexe ci-jointe est représentée, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

La courbe (c_f) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (c_f)

La courbe (c_f) admet une branche parabolique de direction (O, \vec{i}) au voisinage de $+\infty$

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.
- b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x$
- c) Etudier la position de (c_f) par rapport à la droite $\Delta : y = x$.
- 2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Représenter sur l'axe des abscisses : u_0, u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2

- 3) a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$
- b) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 4) a) Montrer par récurrence que $3 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$
- b) En déduire que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 5) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0, 2[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f .
- b) Construire la courbe (C) .
- 2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, 2[$.
- a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, 2[$ sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer dans le même repère la courbe (C') de g^{-1} (g^{-1} étant la bijection réciproque de g)

c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

3) Soit H une fonction dérivable sur $]0, 2[$ telle que pour tout $x \in]0, 2[$ $H'(x) = f(x)$ et $H(1) = 0$.

On désigne par (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par $U_n = H(1 + \frac{1}{n}) - H(1 + \frac{1}{n+1})$.

a) Déterminer la limite de (U_n)

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a $\frac{1}{n(n+1)} f(\frac{n+2}{n+1}) \leq U_n \leq \frac{1}{n(n+1)} f(\frac{n+1}{n})$

c) En déduire la limite de $(n^2 U_n)$.

Exercice 4

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

I) Soit l'équation (E) : $z^2 - 2mz + 2 = 0$ avec m est un paramètre complexe non nul.

On pose $M(m)$, $M'(z')$ et $M''(z'')$ où z' et z'' sont les solutions de l'équation (E).

Sans calculer z' et z'' montrer que :

1) M est le milieu du segment $[M'M'']$.

2) $\arg(z') + \arg(z'') \equiv 0[2\pi]$ et que $[OI)$ est la bissectrice de $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''})$ avec $I(1)$

II) Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 1 + e^{i2\theta} = 0$.

2) On désigne $M_1(1 - ie^{i\theta})$, $M_2(1 + ie^{i\theta})$ et $I(1)$

a) Montrer que $S_I(M_1) = M_2$ (S_I la symétrie centrale de centre I).

b) Montrer que M_1 , M_2 et O sont situés sur le cercle ζ de rayon 1 et de centre que l'on déterminera

c) En déduire que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

d) Déterminer la valeur de θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle.

BON TRAVAIL

Annexe à rendre avec la copie

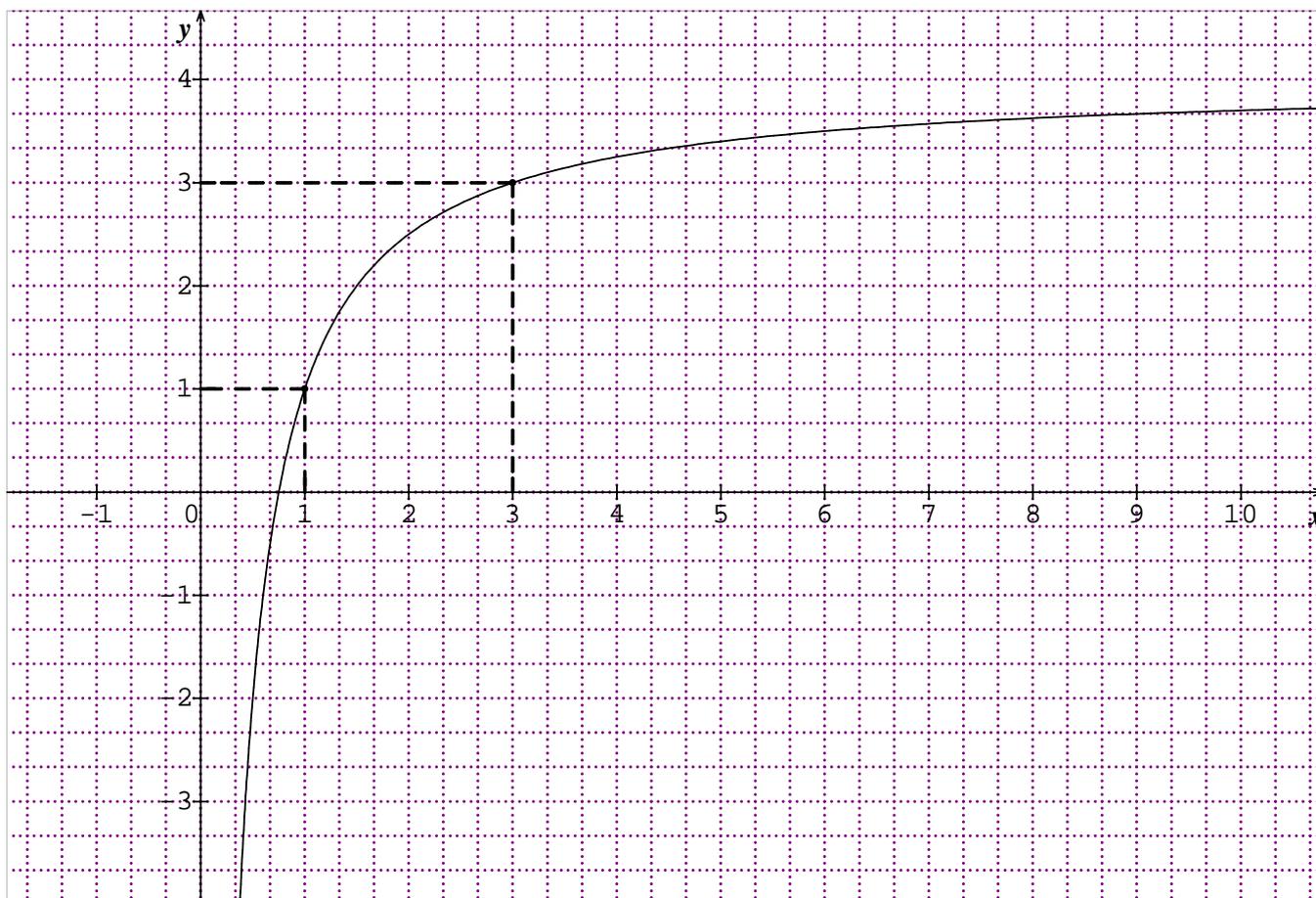
Exercice 1

Répondre par **vrai** ou **faux** sans aucunes justifications

$ABCD$ est un rectangle, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

- 1) $S_{(AB)} \circ S_{(DC)} = t_{\overline{IJ}}$
- 2) $S_{(AB)} \circ S_{(AD)} = S_D$
- 3) Si f est une isométrie qui envoie A sur D et B sur C alors $f(J) = I$
- 4) Si g est une isométrie tels que $g(C) = D$ et $g(D) = C$ alors :
 - i) $g(J) = J$
 - ii) $g \circ g = \text{Id}_p$
 - iii) $g = S_J$

Exercice 2



Exercice 1 :

1).Faux. 2). Faux. 3). Faux. 4).i).Vrai ii). Faux. iii).Vrai.

Exercice 2 :

1).a).

X	0	$+\infty$
f'(x)		+
f	$-\infty$	$+\infty$

.b).f(x)=x signifie x=1 ou x=3.

c).

X	0	1	3	$+\infty$	
f(x)-x	-	0	+	0	-
position	(c_f) est en dessous de Δ	(c_f) est en dessus de Δ	(c_f) est en dessous de Δ		

2). Voir annexe

3).a). Pour n=0 on a $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$ (vrai).Supposons que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$ On a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ et f est croissante sur $[1 ; 3]$ donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$ Donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$.D'où $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3 \forall n \in \mathbb{N}$ b).On a $u_n \leq u_{n+1} , \forall n \in \mathbb{N}$, donc (u_n) est croissante or (u_n) est majorée par 3 donc (u_n) est convergentevers un réel $\alpha \in [1 ; 3]$ qui vérifie $f(\alpha)=\alpha$ (car on a : $u_{n+1}=f(u_n)$ et (u_n) est convergente vers un réel $\alpha \in [1 ; 3]$ et f est continue en α (car f est continue sur $[1 ; 3]$))on a $f(\alpha)=\alpha$ signifie $\alpha =1$ ou $\alpha =3$ or $\alpha \geq u_0$ donc $\alpha \geq 2$ alors $\alpha \neq 1$ d'où $\alpha =3$.4).a). Pour n=0 on a $3 \leq v_1 \leq v_0 \leq 5$ (vrai).Supposons que $3 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$ et montrons que $3 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 5$ On a $3 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$ et f est croissante sur $[3 ; 5]$ donc $f(3) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(5)$ Donc $3 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 5$.D'où $3 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5 \forall n \in \mathbb{N}$

b). On a $v_n \geq v_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, donc (v_n) est décroissante or (v_n) est minorée par 3 donc (v_n) est convergente vers un réel $\alpha' \in [3; 5]$ qui vérifie $f(\alpha') = \alpha'$ (car on a : $v_{n+1} = f(v_n)$ et (v_n) est convergente vers un réel $\alpha' \in [3; 5]$ et f est continue en α' (car f est continue sur $[3; 5]$))

on a $f(\alpha') = \alpha'$ signifie $\alpha' = 1$ ou $\alpha' = 3$ or $1 \notin [3; 5]$ alors $\alpha \neq 1$ d'où $\alpha' = 3 = \alpha$.

5). on a $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$, (car $u_n \leq 3$ et $v_n \geq 3$) et (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $(u_n - v_n)$ converge vers $3 - 3 = 0$.

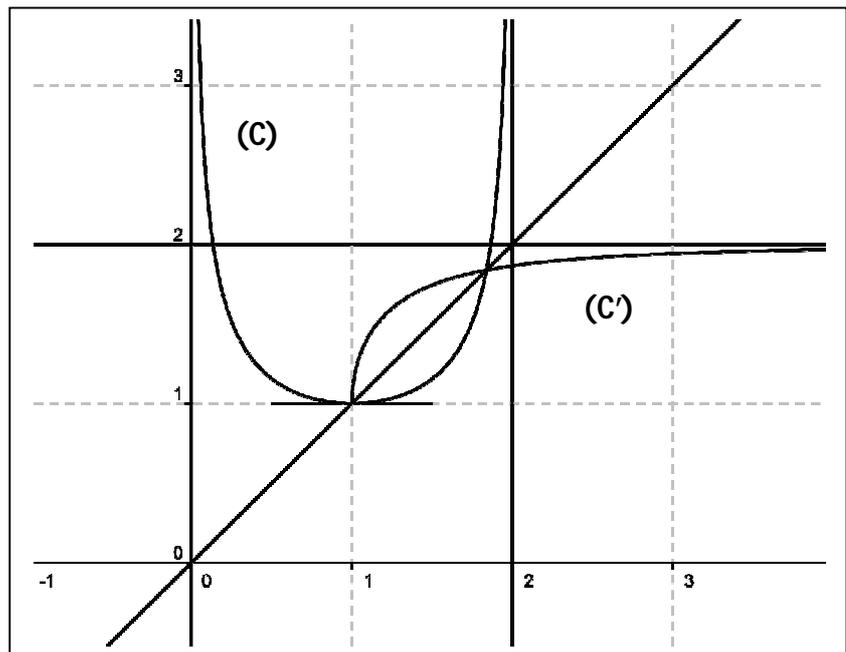
Exercice 3:

1). a). La fonction $x \mapsto 2x - x^2$ est dérivable sur $]0; 2[$ et $2x - x^2 > 0, \forall x \in]0; 2[$, donc la fonction $x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$ est dérivable sur $]0; 2[$, or $\sqrt{2x - x^2} \neq 0, \forall x \in]0; 2[$, alors f est dérivable sur $]0; 2[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{-(\sqrt{2x-x^2})'}{(\sqrt{2x-x^2})^2} = \frac{x-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \text{ d'où}$$

X	0	1	2
f'(x)	-	0	+
f	$+\infty$	1	$+\infty$

b).



2). a). g est continue et strictement croissante sur $]0; 2[$ donc g réalise une bijection de $]0; 2[$

sur $g(]0; 2[) = [1; +\infty[= J$.

b). Voir figure.

$$c). \begin{cases} g^{-1}(x) = y \\ x \in [1; +\infty[\end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} g(y) = x \\ y \in]0; 2[\end{cases} \text{ on a } g(y) = x \text{ signifie } x^2 y^2 - 2x^2 y + 1 = 0$$

$$\Delta = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) \geq 0 \text{ donc } y = \frac{x^2 - \sqrt{x^2(x^2 - 1)}}{x^2} = 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \notin [1; +\infty[\text{ ou } y = \frac{x^2 + \sqrt{x^2(x^2 - 1)}}{x^2} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \in [1; +\infty[$$

$$g^{-1}(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \quad \forall x \in [1; +\infty[.$$

$$3). a) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} H\left(1 + \frac{1}{n}\right) - H\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 0 - 0 = 0 \text{ (car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} H(x) = H(1) = 0)$$

$$\text{De même } \lim_{n \rightarrow +\infty} H\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 0$$

b). $H'(x) = f(x)$, $\forall x \in]0; 2[$, et f est strictement croissante sur $]1; 2[$ or $1 \leq 1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{n} < 2$

$$\text{donc } H'\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq H'(x) \leq H'\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \forall x \in \left[1 + \frac{1}{n+1}; 1 + \frac{1}{n}\right],$$

Or H est continue sur $\left[1 + \frac{1}{n+1}; 1 + \frac{1}{n}\right]$, et H est dérivable sur $\left]1 + \frac{1}{n+1}; 1 + \frac{1}{n}\right[$ donc d'après le théorème des accroissements finis on a :

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) \left(H'\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) \leq H\left(1 + \frac{1}{n}\right) - H\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) \left(H'\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \text{ on a } \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

c). On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq n^2 u_n \leq \frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$.

Exercice 4:

I). 1) On a $z' + z'' = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{1} = 2m$ signifie $\frac{z_{M'} + z_{M''}}{2} = m = z_M$ signifie M est le milieu du segment $[M'M'']$.

$$2). \text{On a } \arg(z') + \arg(z'') = \arg(z'z'') = \arg\left(\frac{z}{a}\right) = \arg(z) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\cdot \text{On a } \arg(z') + \arg(z'') \equiv 0 [2\pi] \text{ signifie } (\widehat{O\vec{I}; O\vec{M}'}) + (\widehat{O\vec{I}; O\vec{M}''}) \equiv 0 [2\pi] \text{ signifie } (\widehat{O\vec{I}; O\vec{M}'}) \equiv -(\widehat{O\vec{I}; O\vec{M}''}) [2\pi]$$

signifie $[OI]$ est la bissectrice de $(\widehat{O\vec{M}'; O\vec{M}''})$.

II). 1). $\Delta' = 1 - 1 - e^{i2\theta} = (ie^{i\theta})^2$ donc $z_1 = 1 - ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + ie^{i\theta}$

$$2). a). \frac{z_1 + z_2}{2} = 1 = z_I \text{ signifie } I \text{ est le milieu du segment } [M_1 M_2] \text{ signifie } S_1(M_1) = M_2$$

b). On a $|O M_1| = |O M_2| = 1$ signifie M_1, M_2 et O sont situés sur le cercle ζ de rayon 1 et de centre I .

c). On a $[M_1 M_2]$ est un diamètre de ζ et $O \in \zeta$ donc le triangle $OM_1 M_2$ est rectangle en O .

d). Le triangle $OM_1 M_2$ est isocèle en O signifie $OM_1 = OM_2$ signifie $|z_1| = |z_2|$

Le calcul donne $\sin(\theta) = 0$ signifie $\theta = 0$ (car $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

BON TRAVAIL

