Devoir de contrôle n° 1

Exercice 1 *(3 points)*

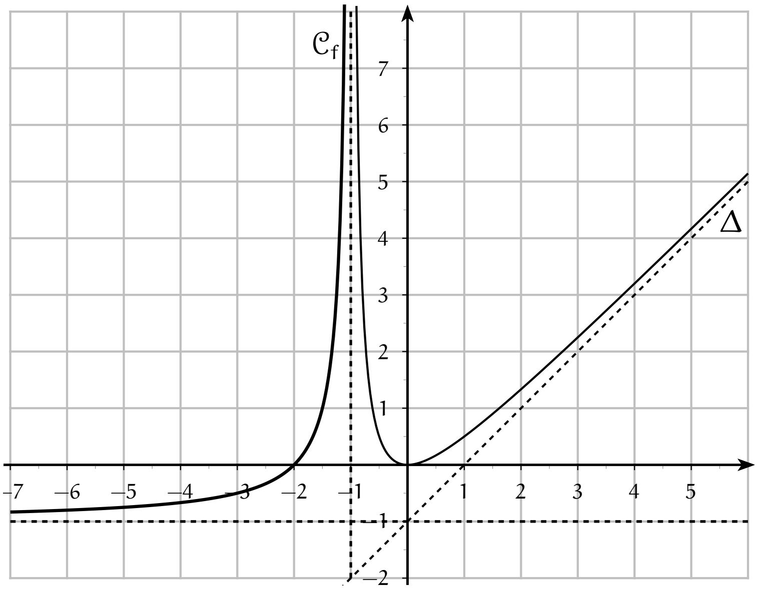
Voir la correction

Pour chaque proposition choisir l'unique bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

1. Lorsque θ décrit $[0, 2\pi]$ alors $M(i - e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})$ décrit :
   a) un cercle b) un arc d'un cercle c) un segment de droite
2. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n^2}$. Alors :
   a) u est convergente. b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ c) u n'admet pas de limite.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n + \sin(n\frac{\pi}{3})}{n^2 + 1} =$
   a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$

Exercice 2 *(5 points)*

Voir la correction



la courbe $\mathscr{C}_f$ représentée ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
On sait que :

- ✔ La droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$
- ✔ La droite $\Delta' : y = -1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$
- ✔ La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.

1. A l'aide du graphique et des renseignements fournis déterminer :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x + 1)$.
   (b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{-x+1}{x+1}\right)$.
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x^2+1)}{x}$.
2. Soit la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (b) Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en -1.
3. (a) Déterminer l'ensemble de définition de $f \circ f$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f \circ f)(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (f \circ f)(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(f \circ f)(x)}{f(x)}$.

Prof: *Lahbib Ghaleb*

Exercice 3 *(6 points)*

Voir la correction

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Soient les points $A(i)$ et $B(-i)$.
Soit f l'application de $\mathcal{P} \setminus \{B\}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{iz+1}{z+i}$.

I- On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Soit $M(z) \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\}$, $N(\bar{z})$ et $M'(z')$ l'image de M par f.
   (a) Montrer que A, N et M' sont alignés.
   (b) Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}\right)$ $[2\pi]$.
   (c) En déduire que :
   z' est un réel non nul si, et seulement si, M appartient au cercle $\mathcal{C}$ privé de A et B.
2. Soit $M_1 \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$ et ${M'}_1 = f(M_1)$.
   Déduire des questions précédentes une construction de ${M'}_1$.

II- Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\left(\dfrac{iz+1}{z+i}\right)^3 = 1$.

1. (a) Montrer que si z est solution de (E) alors $M(z)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$.
   (b) En déduire que si z est solution de (E) alors z est réel.
2. (a) Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Montrer que : $\dfrac{i\tan\alpha + 1}{\tan\alpha + i} = e^{i\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$.
   (b) En déduire les valeurs de $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tels que $\tan\alpha$ soit une solution de l'équation (E).

Exercice 4 *(6 points)*

Voir la correction

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$; pour tout $\quad n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite u .
   (b) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
   (c) Retrouver la limite de la suite u .
4. Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant S_n \leqslant n + 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Correction de l'exercice: 1

(Q.C.M)

Retour à l'énoncé

1. $z_M = i - e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} = i - \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = i - 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Donc $M\left(-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ ,\ 1\right)$.
   Alors $M \in \mathcal{D} : y = 1$ et $x \in [-2, 2]$.
   Par suite l'ensemble des points $M\left(i - e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right), \theta \in [0, 2\pi]$ n'est ni un cercle ni un arc d'un cercle.
   Ainsi la réponse correcte est **(c)**, c'est à dire l'ensemble des points $M(i - e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}), \theta \in [0, 2\pi]$ est un segment de droite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n^2} > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
   Supposons que la suite (u_n) est majorée alors elle est convergente vers une limite ℓ.
   (Car une suite croissante et majorée est convergente).
   La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$ donc $u_n \geqslant 1$ donc $\ell \geqslant 1$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n^2} \implies \lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n^2} \implies \ell - \ell = \dfrac{1}{\ell^2} \implies \dfrac{1}{\ell^2} = 0$. Ce qui est impossible alors la suite (u_n) est non majorée. On conclut que la suite (u_n) est croissante et non majorée par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   La réponse correcte est **(b)**.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant \sin(n\frac{\pi}{3}) \leqslant 1 \implies n - 1 \leqslant n + \sin(n\frac{\pi}{3}) \leqslant n + 1 \implies \dfrac{n-1}{n^2+1} \leqslant \dfrac{n + \sin(n\frac{\pi}{3})}{n^2+1} \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-1}{n^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n + \sin(n\frac{\pi}{3})}{n^2+1} = 0$.
   Ainsi la réponse correcte est **(a)**.

Correction de l'exercice: 2

Retour à l'énoncé

1. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x + 1 = 0)$.
   (b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{x+1} = -1$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{-x+1}{x+1}\right) = +\infty$.
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x^2+1)}{x^2+1} \times \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$ car :
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x^2+1)}{x^2+1} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{f(X)}{X} = 1$ (avec $X = x^2+1$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
2. Soit la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$
   (a) L'ensemble de définition de $\mathcal{D}_g$ de g est :
   $\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x) > 0\} =]-2, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$
   (b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.
   Donc la fonction g est prolongeable par continuité en -1.
3. (a) $(f \circ f)(x) = f[f(x)]$.
   Donc $(f \circ f)(x)$ est définie si, et seulement si, $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_f$.
   Or $x \in \mathcal{D}_f \iff x \neq -1$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f, f(x) \neq -1$,
   donc $(f \circ f)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f[f(x)] = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}(f \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f[f(x)] = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(f \circ f)(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f[f(x)]}{f(x)} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{f[X]}{X} = 1$ (avec $X = f(x)$).

Correction de l'exercice: 3

Retour à l'énoncé

I- 1. (a) $\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{AM'})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AN})} = \dfrac{z'-i}{\bar{z}-i} = \dfrac{\frac{iz+1}{z+i}-i}{\bar{z}-i} = \dfrac{2}{(z+i)(\bar{z}-i)} = \dfrac{2}{(z+i)\,\overline{(z+i)}} = \dfrac{2}{|z+i|^2} \in \mathbb{R}$.

Donc $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires. Donc A, N et M' sont alignés.

(b) $z' = \dfrac{iz+1}{z+i} = i\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$.

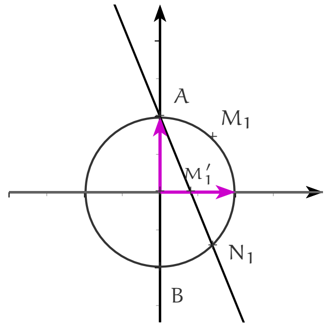
$\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \arg(z')[2\pi] \equiv \arg(i) + \arg\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \arg\left(\dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right)\ [2\pi]$.

(c) Soit $M(z) \in \mathcal{P}\setminus\{B\}$.

z' est un réel non nul $\iff \arg(z') = k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et $z'\neq 0 \iff \dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right) = k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et $z\neq i$

$\iff \left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et $M\neq A \iff M$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ privé de A et B.

2.



Soit $M_1(z_1) \in \mathcal{C}\setminus\{A,B\}$ et $M'_1(z'_1) = f(M_1)$.

D'après la question **1. (c)** on déduit que z'_1 est réel. Donc $M'_1 \in (O,\vec{u})$.

D'après la question **1. (a)**, $M'_1 \in (AN_1)$ avec $N_1 = S_{(O,\vec{u})}(M)$.

D'où M'_1 est le point d'intersection de l'axe $(O,\vec{u})$ et la droite (AN_1).

II- 1. (a) Soit z une solution de l'équation (E) et $M(z)$.

Donc $\left(\dfrac{iz+1}{z+i}\right)^3 = 1$ donc $\left|\left(\dfrac{iz+1}{z+i}\right)^3\right| = 1$ donc $\left|\dfrac{iz+1}{z+i}\right|^3 = 1$ donc $\left|\dfrac{iz+1}{z+i}\right| = 1$ donc $\dfrac{|iz+1|}{|z+i|} = 1$ donc $|iz+1| = |z+i|$ donc $|i(z-i)| = |z+i|$ donc $|i|\,|z-i| = |z+i|$ donc $|z-i| = |z+i|$ donc $AM = BM$ donc M appartient à la médiatrice de [AB].

(b) Soit z une solution de l'équation (E) et $M(z)$ alors $M(z)$ appartient à la médiatrice de [AB] donc $M(z) \in (O,\vec{u})$ donc z est réel.

2. (a) $\dfrac{i\tan\alpha+1}{\tan\alpha+i} = \dfrac{i\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)+1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+i} = \dfrac{i\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha+i\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{i(\cos\alpha-i\sin\alpha)} = \dfrac{e^{i\alpha}}{ie^{-i\alpha}} = \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}} = e^{i\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$.

(b) $\tan\alpha$ est solution de (E) et $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\iff \left(\dfrac{i\tan\alpha+1}{\tan\alpha+i}\right)^3 = 1$ et $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\iff \left(e^{i\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^3 = 1$ et $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\iff e^{i\left(6\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)} = 1$ et $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\iff 6\alpha-\dfrac{3\pi}{2} = 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

$\iff \alpha = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{3}$ et $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\iff \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ ou $\alpha = \dfrac{-\pi}{12}$ ou $\alpha = \dfrac{-5\pi}{12}$

Correction de l'exercice: 4

Retour à l'énoncé

1. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
Vérifions pour $n = 0$.
$u_0 \geqslant 1 \iff 2\geqslant 1$ vrai.
Soit $n\in\mathbb{N}$.
Supposons que $u_n\geqslant 1$ et montrons que $u_{n+1}\geqslant 1$.
$u_{n+1}-1 = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} - 1 = \dfrac{1+u_n^2-2u_n}{2u_n} = \dfrac{(1-u_n)^2}{2u_n}$.

$u_n \geqslant 1 \implies \dfrac{(1-u_n)^2}{2u_n} \geqslant 0 \implies u_{n+1} \geqslant 1.$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} - u_n = \dfrac{1+u_n^2-2u_n^2}{2u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{2u_n}.$

$u_n \geqslant 1 \implies u_n^2 \geqslant 1 \implies \dfrac{1-u_n^2}{2u_n} \leqslant 0 \implies u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$

D'où la suite (u_n) est décroissante.

(b) La suite (u_n) est décroissante et minoré donc elle est convergente vers une limite ℓ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ donc $\ell \geqslant 1$.

On a :

- ✔ $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \longmapsto \dfrac{1+x^2}{2x}$.
- ✔ (u_n) est convergente vers ℓ avec $\ell \geqslant 1$.
- ✔ La fonction f est une fonction rationnelle continue sur $D_f = \mathbb{R}^*$ en particulier en ℓ.

Donc $\ell = f(\ell)$.

$\ell = f(\ell) \iff \dfrac{1+\ell^2}{2\ell} = \ell \iff 1+\ell^2 = 2\ell^2 \iff \ell^2 = 1 \iff \ell = 1$ ou $\ell = -1$.

Comme $\ell \geqslant 1$ alors $\ell = 1$.

3. (a) $u_{n+1} - 1 = \dfrac{(1-u_n)^2}{2u_n} = \dfrac{(u_n-1)^2}{2u_n} = \left(\dfrac{u_n-1}{2u_n}\right)(u_n-1).$

$\dfrac{u_n-1}{2u_n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2u_n}.$

La suite (u_n) est décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2$.

$u_n \leqslant 2 \implies 2u_n \leqslant 4 \implies \dfrac{1}{2u_n} \geqslant \dfrac{1}{4} \implies -\dfrac{1}{2u_n} \leqslant -\dfrac{1}{4} \implies \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2u_n} \leqslant \dfrac{1}{4} \implies \dfrac{u_n-1}{2u_n} \leqslant \dfrac{1}{4}.$

Comme $u_n - 1 \geqslant 0$ alors $\left(\dfrac{u_n-1}{2u_n}\right)(u_n-1) \leqslant \dfrac{1}{4}(u_n-1)$ donc $u_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{4}(u_n-1) \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n-1).$

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Vérifions pour $n = 0$.

$u_0 - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \iff 2-1 \leqslant 1 \iff 1 \leqslant 1$ vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $u_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1} - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

$u_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \implies \dfrac{1}{2}(u_n-1) \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}.$

D'après la question (a) on a : $u_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n-1)$.

Donc, $u_{n+1} - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

(c) On a : $0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n-1) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_k \leqslant 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc, $n \leqslant S_n \leqslant n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$ donc, $n \leqslant S_n \leqslant n + 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant S_n \leqslant n + 1 - \dfrac{1}{2^n}$ donc $1 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n \times 2^n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n \times 2^n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 1$