

Exercice N°1 : (3 points)

Répondre par vrai ou faux (avec justification)

1. Soit l'équation E d'inconnue z définie par $z^3 = \bar{z}$
a- $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de E
b- si α est une solution non nulle de E alors $|\alpha| = 1$
c- si $|\alpha| = 1$ alors α est une solution de E
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) . Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b telles que $\frac{a}{b} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
a- O, A et B ne sont pas alignés
b- OAB est un triangle rectangle en O
c- OAB est un triangle équilatéral

Exercice N°2 : (6 points)

Soit U la suite définie par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$
2. a- Montrer que $U_{n+1}^2 - U_n^2 \geq 4$
b- En déduire que $U_n \geq 2\sqrt{n}$
c- Déterminer alors la limite de la suite U
3. Soit V la suite définie sur \mathbb{N}^* par $V_n = U_{n+1}^2 - U_n^2$
a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $V_n \leq 4 + \frac{1}{n}$
b- Déterminer alors la limite de la suite V
4. a- Montrer que pour tout $n \geq 1$; $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
b- En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$
5. Soit S la suite définie sur \mathbb{N}^* par $S_n = \sum_{k=1}^n V_k$
a- Montrer que $S_n \leq 4n + 2\sqrt{n}$
b- Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{U_n^2}{n} \right)$

Exercice N°3 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit A, M et N les points d'affixes respectives -1, z et z'. où z est un nombre complexe différent de -1 et $z' = \frac{z^2}{z+1}$

1. a-montrer que z' est réel ssi $z = \bar{z}$ ou $z\bar{z} = -(z+\bar{z})$
 b-En déduire l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z' est réel
2. Soit z un complexe non nul vérifiant $z\bar{z} = -(z+\bar{z})$ et soit θ un argument de z $\theta \in]-\pi, \pi[$
 a-Montrer que $|z| = -2\cos\theta$
 b-En déduire que $z' = -\cos^2\theta$
 c-Montrer que M varie sur le cercle de centre A et de rayon 1, alors N varie sur un segment que l'on précisera
3. On suppose que M est distinct d'O. montrer que si le triangle OMA est rectangle en M, alors le triangle OMN est rectangle en O.

Exercice N°4 : (5points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x} \sin(\frac{\pi}{x})}{x-1} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\setminus \{1\} \end{cases}$$

1. a-Montrer que pour tout réel x de $]0, 1[$ $\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1}$
 b-Montrer que f est continue en 0
 c-Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} f(x)$
2. On pose $U(x) = \frac{\pi(x-1)}{x}$; $V(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $W(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$
 a-Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$; $f(x) = W(x) \cdot (V \circ U)(x)$
 b- En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 1
 c-A l'aide de g, montrer que l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 3\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ admet dans l'intervalle $]1, 2[$ une solution.

Bon travail