

<b>Prof</b>	Mechmeche Imed
<b>Lycée</b>	Borj-cedria
<b>Niveau</b>	4 <sup>ème</sup> Maths1

## Devoir de contrôle N°1

<b>Matière</b>	Maths
<b>Date</b>	28/10/2013
<b>Durée</b>	2 h

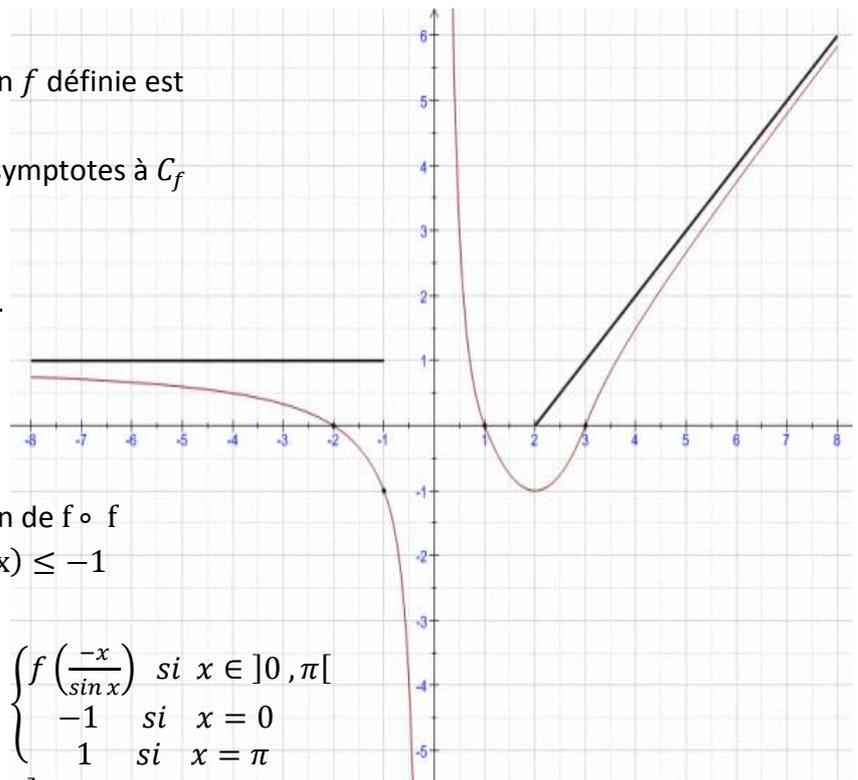
### Exercice 1 : (3 pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- Soient deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$ , telles que :  
la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $C_f$  en  $+\infty$ .  
la droite d'équation  $y = 3x$  est asymptote à  $C_g$  en  $+\infty$ .  
alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g \circ f(x)}{x} = 6$
- Soit une suite  $U$  vérifiant : pour tout  $A > 0$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $U_{n_0} > A$ .  
alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $Z$  tels que  $-iZ + i = 2 \sin \theta e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, \pi[$  est le cercle  $C_{(0,1)}$

### Exercice 2 : (6 pts)

La courbe ci-contre est celle d'une fonction  $f$  définie est continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Les droites d'équations  $y = 1$ ,  $x = 0$  et  $y = x - 2$  sont des asymptotes à  $C_f$



- Calculer par lecture graphique :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{f(x) - x + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x - f(x))$$

- 

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f \circ f$
- Résoudre graphiquement  $(f \circ f)(x) \leq -1$

$$3) \text{ Soit la fonction } g \text{ définie par : } g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

- Montrer que  $g$  est continue sur  $[0, \pi]$ .
- Montrer que l'équation  $g(x) = x - 2$  admet une solution dans  $[0, \pi]$

### Exercice 3 : (6 pts)

Soit l'équation  $(E_\theta) : Z^2 - 2 \cos(2\theta) Z + 2i \sin(2\theta) = 0$ ,  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_\theta)$ .

- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  on considère les points  $M(e^{i2\theta} - 1)$ ,  $N(e^{-i2\theta} + 1)$ ,  $I(-1)$  et  $A(-2)$
- Déterminer et construire l'ensemble  $E$  des points  $M$  lorsque  $\theta$  varie dans  $]0, \frac{\pi}{2}[$
  - Sachant que  $Z_N = \overline{Z_M} + 2$ , expliquer la construction de  $N$  à partir de  $M$
  - Construire les points  $M$  et  $N$  pour  $\theta = \frac{\pi}{6}$
- 3) a) Ecrire chacun des nombres  $Z_M$  et  $Z_N$  sous la forme exponentielle.
- En déduire que  $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) \equiv 2\theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]$
  - pour quelle valeur de  $\theta$  a-t-on  $M, O$  et  $N$  alignés.
- 4) a) Soit  $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ . Déterminer l'affixe du point  $P$  tel que  $OMPN$  soit un parallélogramme.
- Pour quelles valeurs de  $\theta$  l'aire de  $OMPN$  est-elle maximale.

### Exercice 4 : (5 pts)

Soit  $U$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n^2 + 3U_n + 1 \end{cases}$$

- Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .
  - Montrer que la suite  $U$  est croissante.
  - Montrer par l'absurde que la suite  $U$  n'est pas majorée.
  - En déduire la limite de la suite  $U$ .

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{U_k + 2}$

- Vérifier que  $\frac{1}{U_k + 2} = \frac{1}{U_k + 1} - \frac{1}{U_{k+1} + 1}$
- Montrer alors que  $S_n = 1 - \frac{1}{U_{n+1} + 1}$  puis calculer la limite de suite  $S$ .

Bon travail.

