

Exercice 1 (6 pts)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : (E) : $iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$.
- 2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose : $f(z) = iz^3 + (1 - 3i)z^2 - (4 - 3i)z + 3 + i$
 - a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
 - b) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que : $\forall z \in \mathbb{C}; f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$.
 - c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.
- 3) a) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe : $1 + i\sqrt{3}$
 - b) En déduire la forme exponentielle de chacun des complexes suivants : $3 + i\sqrt{3}$ et $2i - (1 + i\sqrt{3})$

Exercice 2 (7 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$.

- 1) a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.
 - b) Déterminer l'affixe z_G du point G centre du triangle O A B.
 - c) Déterminer l'écriture exponentielle du complexe z_A .
- 2) Soit C le point du plan tel que : $OA = OC$ et $(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$
 - a) Montrer que $|z_C| = 2$ et $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ où z_C est l'affixe du point C.
 - b) En déduire que $z_C = 1 + i\sqrt{3}$
- 3) a) Montrer que O A B C est un losange.
 - b) O A B C est-il un carré ?
- 4) Déterminer et construire l'ensemble $E = \left\{ M(z) \in \mathbb{P} / \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \right\}$

Exercice 3 (7 pts)

- 1) Soit la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par : $g(x) = -9x \sin x - 9 \cos x + 12$
- Vérifier que : $\forall x \in [0, \pi]; g'(x) = -9x \cos x$.
 - Dresser le tableau de variation de g sur $[0, \pi]$.
 - Déterminer les images par la fonction g des intervalles $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0, \pi]$ exactement deux solutions qu'on notera α et β .
- 2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3 \cos x - 4}{3x}$.
- Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[; \frac{-7}{3x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{3x}$.
 - Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[; \frac{-1}{3x} \leq f(x) \leq \frac{-7}{3x}$.
 - Déduire les valeurs des limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- 3) a) Vérifier que : $\forall x \in]0, \pi]; f'(x) = \frac{g(x)}{9x^2}$.
- b) Déterminer alors le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0, \pi]$.