



Le devoir comporte 3 pages Numérotées de 1/3 à 3/3

La page 3/3 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (3points) : (voir annexe)

Exercice 2(6points) :

Dans la figure de l'annexe ci-jointe est représentée, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

La courbe (c_f) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (c_f)

La courbe (c_f) admet une branche parabolique de direction (O, \vec{i}) au voisinage de $+\infty$

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.
- b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x$
- c) Etudier la position de (c_f) par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

Représenter sur l'axe des abscisses : u_0, u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2

- 3) a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$
- b) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 4) a) Montrer par récurrence que $3 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$
- b) En déduire que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 5) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 3 (6points) :

Soit f la fonction définie sur $]0, 2[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f .
- b) Construire la courbe (C) .
- 2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, 2[$.
- a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, 2[$ sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer dans le même repère la courbe (C') de g^{-1} (g^{-1} étant la bijection réciproque de g)

c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

3) Soit H une fonction dérivable sur $]0,2[$ telle que pour tout $x \in]0,2[$ $H'(x) = f(x)$ et $H(1) = 0$.

On désigne par (U_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = H(1 + \frac{1}{n}) - H(1 + \frac{1}{n+1})$.

a) Déterminer la limite de (U_n)

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n(n+1)} f(\frac{n+2}{n+1}) \leq U_n \leq \frac{1}{n(n+1)} f(\frac{n+1}{n})$

c) En déduire la limite de $(n^2 U_n)$.

Exercice 4(5points) :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

I) Soit l'équation (E) : $z^2 - 2mz + 2 = 0$ avec m est un paramètre complexe non nul.

On pose $M(m)$, $M'(z')$ et $M''(z'')$ où z' et z'' sont les solutions de l'équation (E).

Sans calculer z' et z'' montrer que :

1) M est le milieu du segment $[M'M'']$.

2) $\arg(z') + \arg(z'') \equiv 0[2\pi]$ et que $[OI)$ est la bissectrice de $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''})$; (avec $I(1)$)

II) Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 1 + e^{i2\theta} = 0$.

2) On désigne $M_1(1 - ie^{i\theta})$, $M_2(1 + ie^{i\theta})$ et $I(1)$

a) Montrer que $S_I(M_1) = M_2$ (S_I la symétrie centrale de centre I).

b) Montrer que M_1 , M_2 et O sont situés sur le cercle ζ de rayon 1 et de centre que l'on déterminera

c) En déduire que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

d) Déterminer la valeur de θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle.

BON TRAVAIL

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1

Répondre par **vrai** ou **faux** sans aucunes justifications

$ABCD$ est un rectangle ,I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

- 1) $S_{(AB)} \circ S_{(DC)} = t_{\vec{IJ}}$
- 2) $S_{(AB)} \circ S_{(AD)} = S_D$
- 3) Si f est une isométrie qui envoie A sur D et B sur C alors $f(J) = I$
- 4) Si g est une isométrie tels que $g(C) = D$ et $g(D) = C$ et $g(I) = I$ alors :
 - i) $g(J) = J$
 - ii) $g = S_J$
 - iii) $g \circ g = Id_p$

Exercice 2

