

EXERCICE N: 1 (3 points)

Indiquer la bonne réponse pour chacune des questions suivantes. Aucune justification n'est demandée

I) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi x}{2x-1}\right)$ est égale :

- a) $+\infty$ b) 0 c) $-\infty$

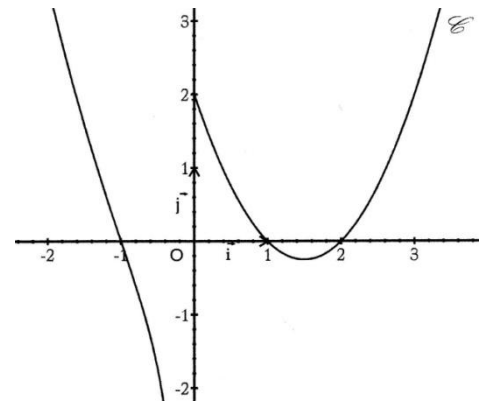
II) Soit g une fonction tel que pour tout $x \in]-\infty ; 0[$: $\frac{x^2-1}{x^2} \leq g(x) - x \leq \frac{x^2+1}{x^2}$

et (C_g) sa courbe dans un repère orthonormé , alors :

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ c) $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à (C_g)

III) Le graphique ci-contre est la représentation graphique \mathcal{C} d'une fonction f définie sur \mathbb{R}^* et telle que :

- L'axe des ordonnées est une asymptote à \mathcal{C} .
- \mathcal{C} admet deux branches paraboliques de direction $(O ; \vec{j})$.



1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ égal à :

- a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

2) Le domaine de définition de $f \circ f$ est :

- a) \mathbb{R}^* b) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ c) $\mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1, 2\}$

3) Le nombre de solution(s) de l'équation $f \circ f(x) = x$ dans $]0 ; 1[$ est :

- a) 0 b) 1 c) 2

EXERCICE N: 2 (5.5 points)

Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n \geq 1$.

2) Montrer que la suite U est croissante .

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 - \frac{1}{U_n} \leq \frac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{U_n}$

EXERCICE N: 3 (6 points)

Soit m un nombre complexe non nul et soit (E) l'équation : $z^2 + imz - (1 + i)m^2 = 0$

I) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) .

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O , \vec{u} , \vec{v}) .

On considère les points A , M et M'' d'affixes respectives : 1 , m et $(-1 - i)m$.

Soit M' le point du plan tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} OM' = \sqrt{2} OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{array} \right.$$

1) a) Déterminer en fonction de m , l'affixe m' de M' .

b) Vérifier que M' et M'' sont symétriques par rapport à O .

2) Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle en M .

3) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tels que $m' \in] - \infty ; 0 [$.

4) On pose : $m = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta}$ avec $\theta \in] 0 ; \frac{\pi}{2} [$.

a) Ecrire $m' - 1$ sous forme exponentielle .

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle OAM' est un triangle équilatéral .

EXERCICE N: 4 (5.5 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère un carré direct OABC de centre Ω .

On note I , J et K les milieux respectifs de [OA] , [OC] et [AB] .

1) Soit $f = S_{(OB)} \circ S_{(\Omega I)}$. Caractériser f .

2) Soit g une isométrie sans points fixes qui transforme O en C et I en J .

a) Montrer que g est une symétrie glissante .

b) Montrer que $g(A) = O$.

c) En déduire les éléments caractéristiques de g .

3) a) Vérifier que $g = t_{\overline{AO}} \circ S_{(AC)}$.

b) Soit $D = g(K)$. Montrer que O est le milieu de [ID] .

4) Soit $\varphi = g^{-1} \circ f$.

a) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(I)$ puis caractériser φ .

b) Trouver alors l'ensemble Δ des points M du plan tels que $f(M) = g(M)$.