LYCEE THELEPTE	4 ème Math
✠✠✠	Epreuve : Mathématiques
DEVOIR DE CONTROLE N°1	Durée : 2heures
✠✠✠	A .S : 2010-2011
Enseignant : H.Salem	

Exercice 1: (3pts)
Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit z un nombre complexe. $|z-i|$ est égale à :

a) $|z|+1$; b) $\sqrt{z^2+1}$; c) $|iz+1|$

2) Soit f et g deux fonctions définies sur $]-\infty,2]$ tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et pour tout $x\leq 1$, $g(x)=4x+2\sqrt{2-x}$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)=$:

a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 1

3) $(\sqrt{3}+i)^{2010}$

a) appartient à IR_+ ; b) appartient à IR_- ; c) est imaginaire pur.

4) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$.

a) (U_n) converge vers 0 ; b) (U_n) est divergente ; c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$.

Exercice 2: (5 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & si\ x<0\\ \sqrt{x^2+x+1}-x & si\ x\geq 0\end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Montrer que pour tout $x\in\,]-\infty,0[$, $\frac{x+2}{x}\leq f(x)\leq 1$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3) Montrer que f est continue sur IR.
4) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution α dans l'intervalle$]-\frac{1}{2},0[$.
   b) On déduire que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{-\alpha^2-2\alpha}$

Exercice 3 :(6 pts)

Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2}{2x-2}$.

1) Etudier le sens de variation de f sur $[2,+\infty[$.
2) Soit la suite définie par : $U_0=4$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=f(U_n)$.
   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n\geq 2$.
   b) Montrer que (U_n) est décroissante.
   c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4: (7 pts)

1) a) Calculer $\left(1 - 2\sqrt{3}i\right)^2$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0$.

   c) Mettre les solutions sous formes exponentielles.

2) dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$), on considères les points A, B et M d'affixes respectives $i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

   a) Montrer que $z_M - z_A = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire la distance AM en fonction de θ.

   b) Déterminer θ pour que le triangle OAM soit isocèle en A.

3) On désigne par B' le symétrique de B par rapport à l'axe [O,$\vec{u}$) et N le point du plan tel que OB'NM soit un parallélogramme.

   a) Déterminer les affixes des points B' et N.

   b) Déterminer l'ensemble des ponts N lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Bon Travail

Correction

Exercice 1: (3pts)

1) **c)** $|z-i| = |-i(iz+1)| = |iz+1|$

2) **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x + 2\sqrt{2-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x + 2\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 4x - 2x\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(4-2\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}\right) = -\infty$

3) **b)** $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2010} = \left(2e^{i\pi/6}\right)^{2010} = 2^{2010}e^{i\frac{2010\pi}{6}} = 2^{2010}e^{i335\pi} = 2^{2010}e^{i\pi} = -2^{2010}$.

4) **a)** $\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 2: (5 pts)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1-cos(\pi x)}{x} & si\ x<0 \\ \sqrt{x^2+x+1}-x & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$.

2) $\forall x\in\,]-\infty,0[\,,\ -1\leq -cos(\pi x)\leq 1 \implies x\leq x+1-cos(\pi x)\leq x+2$

On multiplie par $\frac{1}{x}$ $(x<0)$ on obtient $\frac{x+2}{x}\leq f(x)\leq 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

3) $x\longmapsto x+1-cos(\pi x)$ et $x\longmapsto x$ sont continues sur $]-\infty,0[$.

Donc $x\longmapsto \frac{x+1-cos(\pi x)}{x}$ est continue sur $]-\infty,0[$.

$x\longmapsto x^2+x+1$ est continue et positive ($\Delta<0$) sur $]0,+\infty[$ donc $x\longmapsto\sqrt{x^2+x+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et donc $x\longmapsto\sqrt{x^2+x+1}-x$ est continue sur $]0,+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^2+x+1}-x = 1 = f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{x+1-cos(\pi x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{u(x)-u(0)}{x-0}$ avec $u(x) = x+1-cos(\pi x)$.

$= u'(0) = 1 = \mathrm{f}(0)$.

f est continue en 0 et par suite f est continue sur IR.

4) a) f est continue sur IR en particulier sur $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

$\mathrm{f}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}+1-cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -1 < 0$, $\mathrm{f}(0) = 1 > 0$

Ainsi l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

b) On a $\alpha < 0$ et $\mathrm{f}(\alpha) = 0 \Longrightarrow \frac{\alpha+1-cos(\pi\alpha)}{\alpha} = 0 \Longrightarrow \alpha + 1 - cos(\pi\alpha) = 0$

$\Longrightarrow cos(\pi\alpha) = \alpha + 1 \Longrightarrow \cos^2(\pi\alpha) = (\alpha+1)^2 \Longrightarrow 1 - \sin^2(\pi\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 1$

$\Longrightarrow \sin^2(\pi\alpha) = -\alpha^2 - 2\alpha = -\alpha(\alpha+2) > 0)$

$\Longrightarrow \sin(\pi\alpha) = \sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$ ou $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$.

Or $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, $-\frac{\pi}{2} < \pi\alpha < 0$ et donc $\sin(\pi\alpha) < 0$.

Par suite $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$.

Exercice 3 :(6 pts)

On a $\forall\, x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$.

1) f est une fonction rationnelle dérivable sur IR\{1} en particulier sur $[2, +\infty[$.

et $\forall\, x \in [2, +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x(2x-2)-2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2-4x}{(2x-2)^2} = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2} > 0$.Aini f est strictement ↗ sur $[2, +\infty[$.

2) a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{U}_n \geq 2$.

- Pour $n = 0$, $\mathrm{U}_0 = 4 > 2$.
- Supposons que $\mathrm{U}_n \geq 2$ et montrons que $\mathrm{U}_{n+1} \geq 2$.

Si $\mathrm{U}_n \geq 2$ alors $f(\mathrm{U}_n) \geq f(2)$ [f ↗] $\Longrightarrow \mathrm{U}_{n+1} \geq 2$ ($f(2) = 2$).

D'où $\mathrm{U}_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $\mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n = f(\mathrm{U}_n) - \mathrm{U}_n = \frac{\mathrm{U_n}^2}{2\mathrm{U_n}-2} - \mathrm{U_n} = \frac{\mathrm{U_n}^2-\mathrm{U_n}(2\mathrm{U_n}-2)}{2\mathrm{U_n}-2} = \frac{-\mathrm{U_n}^2+2\mathrm{U_n}}{2\mathrm{U_n}-2}$

$= \frac{\mathrm{U_n}(-\mathrm{U_n}+2)}{2\mathrm{U_n}-2} < 0$ .Puisque $\mathrm{U}_n \geq 2\ \forall\, n$ et par suite $(\mathrm{U_n})$ est décroissante.

c) $(\mathrm{U_n})$ est décroissante est minorée par 2 donc converge vers un réel ℓ vérifiant : $f(\ell) = \ell$ et $\ell \geq 2$.

$f(\ell) = \ell$ signifie $\frac{\ell^2}{2\ell-2} = \ell$ signifie $\frac{\ell(-\ell+2)}{2\ell-2} = 0$ signifie $\ell = 2\ ou\ \ell = 0$

Comme $\ell \geq 2$ alors $\ell = 2$. <u>Conclusion</u> : $(\mathrm{U_n})$ converge vers 2.

Exercice 4: (7 pts)

1) a) $\left(1-2\sqrt{3}i\right)^2 = 1-4\sqrt{3}i + \left(2\sqrt{3}i\right)^2 = 1-4\sqrt{3}i - 12 = -11-4\sqrt{3}i.$

b) $z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0.$

$\Delta = 1 - 4\left(3 + i\sqrt{3}\right) = -11 - 4i\sqrt{3} = \left(1-2\sqrt{3}i\right)^2.$

$z_1 = \frac{1-\left(1-2\sqrt{3}i\right)}{2} = \sqrt{3}i$, $z_2 = \frac{1+\left(1-2\sqrt{3}i\right)}{2} = 1-\sqrt{3}i$

c) $z_1 = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}}$

$|z_2| = |1-\sqrt{3}i| = 2$. soit θ un argument de z_2.

On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ce qui donne que $\theta \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et alors

$z_2 = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}.$

2) a) $z_M - z_A = \sqrt{3}\,e^{i\theta} - \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}} = \sqrt{3}\left[e^{i\theta} - e^{\frac{i\pi}{2}}\right].$

Rque :

Soit α et β deux réels

$$\boldsymbol{e^{i\alpha} - e^{i\beta}} = e^{\frac{i\alpha}{2}}e^{\frac{i\alpha}{2}}e^{\frac{i\beta}{2}}e^{\frac{-i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}}e^{\frac{i\beta}{2}}e^{\frac{i\alpha}{2}}e^{\frac{-i\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}$$
$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left[e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right] = \boldsymbol{2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\, e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}.$$

On a alors $z_M - z_A = \sqrt{3}\left[2i\sin\left(\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}\right)}\right] = 2\sqrt{3}i\,\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$

$AM = |z_M - z_A| = \left|2\sqrt{3}i\,\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right| = 2\sqrt{3}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|.$

Or $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) > 0.$

D'où $AM = 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$

b) OAM isocèle en A équivaut à

$AM = OA \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = |z_A| \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{12} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $= \frac{13\pi}{12} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Or $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ alors $\theta \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi].$

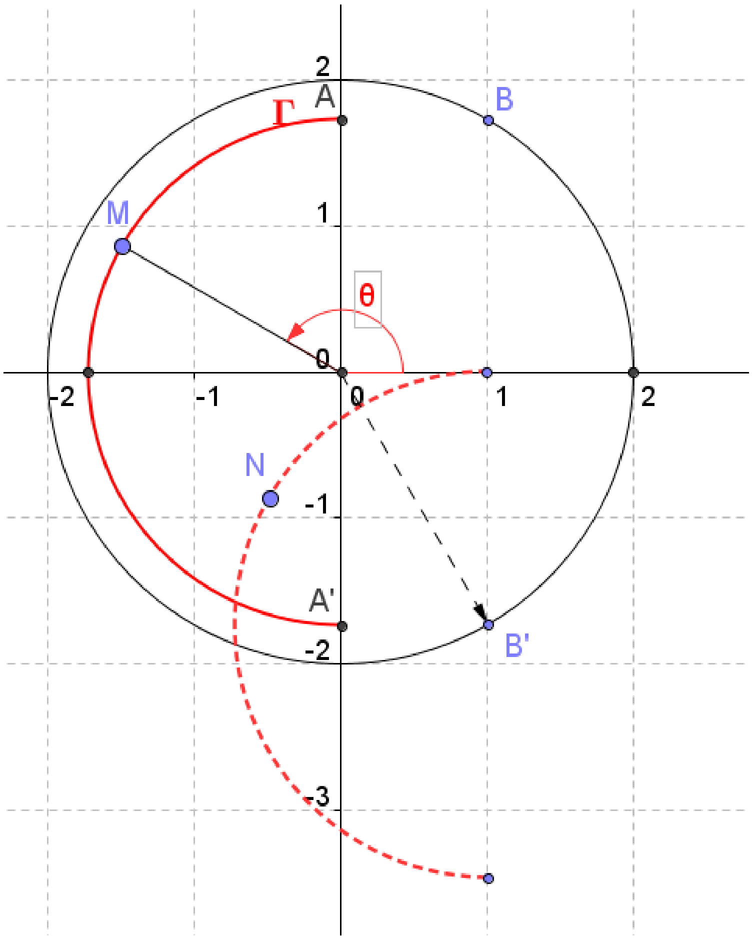
3) a) B' est le symétrique de B par rapport à l'axe [O,$\vec{u}$) alors $z_{B'} = \overline{z_B} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$.

OB'NM soit un parallélogramme signifie $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{MN}$

Signifie $2e^{\frac{i\pi}{3}} = z_N - \sqrt{3}\,e^{i\theta}$ signifie $z_N = 2e^{\frac{i\pi}{3}} + \sqrt{3}\,e^{i\theta}$.

b) On remarque que N est l'image du point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{OB'}$. Or $|z_M| = \sqrt{3}$ et $\arg(z_M) \equiv \theta[2\pi]$ et $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ donc M décrit le demi-cercle Γ de centre O , d'extrémités A et A' qui ne contient pas H privés des points A et A', où A' et H sont les points d'affixes respectives $-\sqrt{3}i$ et $\sqrt{3}$.

Et par suite N décrit $t_{\overrightarrow{OB'}}(\Gamma)$.



Fin