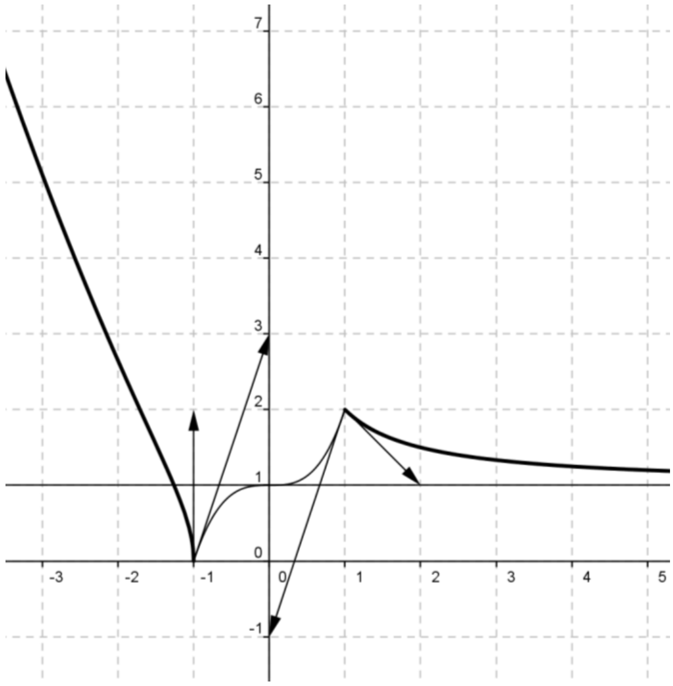
Exercice N°1 : (3 points)



La courbe ci-contre représente une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.La droite y=1 désigne à la fois l'asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (y'y) au voisinage de -∞.

Par justification graphique déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)}{x+1}$, $f'(0)$, $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-2}{x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to1^+} f(\frac{1}{1-x^2})$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi}{1-f(x)}$

Exercice N°2 : (6 points)

1) Soit ω un nombre complexe non nul

a)Résoudre dans $\mathbb{C}$,l'équation (E) : $\omega^2z^2 - \omega z + 1 = 0$

b) On pose dans toute la suite $\omega = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
Mettre les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ de sens direct
On note M, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives :
$\omega = e^{i\theta}$, $z_1 = e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$ et $z_2 = e^{i\left(-\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$

a)Vérifier que : $\overline{z_1}=e^{2i\theta}z_2$

b) Déterminer θ dans chacun des cas suivants :

■ M_1 et M_2 Sont symétriques par rapport à $(o,\vec{u})$

■ M_1 et M_2 Sont symétriques par rapport à $(o,\vec{v})$

c) Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment $[M_1M_2]$

d) Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ vari dans $\mathbb{R}$

e)Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont orthogonaux. En déduire une construction de M_1 et M_2 connaissant M sur le cercle trigonométrique avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice N°3: (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = \sqrt{8 + 2u_n}$

1)a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < u_n < 4$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante

c)En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ Retrouver la limite de (u_n) .

3) Pour n un entier naturel non nul, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 4 - \frac{2}{n}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq S_n < 4$

b) Déterminer la limite de (S_n)

Exercice N°4 : (6 points)

Soit $f_n(x) = x^5 + nx - 2n$ où $x \in \mathbb{R}$.

1)a)Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donner $f_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n et que $x_n \in [0,2]$

c)Calculer x_0 et x_1 et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*: x_n \geq 1$

2)a)Montrer que $\forall x \in [0,2]$et $\forall n \in \mathbb{N}: f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

En déduire que la suite (x_n) est croissante et qu'elle converge.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 2 - \frac{32}{n} \leq x_n \leq 2$ .En déduire la limite de (x_n) .

3) Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = -2 - x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ g(x) = f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a)Calculer $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

b) Montrer que pour tout $x < 0 : -x^2 - 2 \leq g(x) \leq x^2 - 2$

c)Montrer que g est continue en 0.