

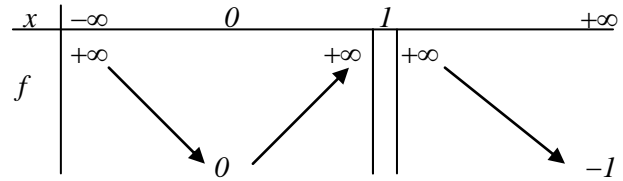
**DEVOIR DE CONTRÔLE N°1**

**Exercice 1 :** ( 4.25 points )

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction  $f$  définie et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Répondre par vrai ou faux à chacune des questions suivantes :

- 1.L'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  deux solutions.
- 2.La courbe de  $f$  admet exactement deux asymptotes.
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} f \circ f(x) = +\infty$  (justifier).
4.  $f(]-\infty, 1[) = ]0, +\infty[$ .
- 5.Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  on a ,  $f(x) \geq x$  (justifier).



**Exercice 2 :** ( 6 points )

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les deux nombres complexes  $a = \sqrt{3} + i$  et  $b = 1 - i\sqrt{3}$ .

1.a.Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes  $a$  et  $b$ .

b.Vérifier que  $a^2 = 2\bar{b}$ .

2.Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

a.Placer les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a, \bar{b}$  et  $c = a + \bar{b}$ .

b.Vérifier que  $c = (\sqrt{6} + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

3.On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation ( E ) :  $z^2 + 2z - 2c = 0$ .

a.Vérifier que  $a$  est une solution de ( E ).

b.On désigne par  $d$  la deuxième solution de ( E ).Montrer que  $d = (\sqrt{6} + \sqrt{2})e^{-i\frac{11\pi}{12}}$ .

c.Construire alors le point  $D$ .

**Exercice 3 :** ( 5 points )

Soit  $\alpha$  un réel tel que  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ .

On considère les deux suites réelles  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$u_0 = 2 ; v_0 = 1$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  ,  $u_{n+1} = (1 - \alpha)u_n + \alpha v_n$  et  $v_{n+1} = \alpha u_n + (1 - \alpha)v_n$ .

1.Soit  $(t_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $t_n = u_n - v_n$ .

Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  ,  $t_n = (1 - 2\alpha)^n$ . En déduire la limite de la suite  $(t_n)$ .

2.a.Vérifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  ,  $u_n \geq v_n$ .

b.Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et que la suite  $(v_n)$  est croissante.

c.En déduire que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes vers une même limite  $l$ .

3.a.Montrer que la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = u_n + v_n$  est constante.

b.En déduire la valeur de  $l$ .

voir verso  $\Rightarrow$

**Exercice 4 :** ( 4.75 points )

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = x^3 + nx - n$ .

1. Vérifier que  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $]0, 1[$  une solution unique  $a_n$ . Vérifier que  $a_n = \frac{n}{n + a_n^2}$ .

3.a. Vérifier que  $f_{n+1}(a_n) = a_n - 1$ . Que vaut  $f_{n+1}(a_{n+1})$  ?

b. En déduire que la suite  $(a_n)$  est croissante puis qu'elle est convergente.

4. Vérifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a  $a_n > \frac{n}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

**Bon travail**

\* \* \* \* \*